Hallo liebe 10dn!

Wenn das bisherige Material gut verstanden wurde, dann schreiten wir weiter voran.
Bitte lest den Abschnitt 5.2 und druckt ihn für das Regelheft aus.

Darin wird erläutert, wie man in einem Punkt eines Graphen die dort vorliegende Steigung bestimmen kann.
Wenn ihr das Blatt verstanden habt, dann überprüft man euer Wissen mit folgender Aufgaben:

1. Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^2$. Wie groß ist die Steigung der zugehörigen Normalparabel an der Stelle $x_0 = 1$ und an der Stelle $x_0 = 2$?
Verwende dazu jeweils mind. zwei kleine Intervalle, so dass du den Grenzwert der mittleren Steigungen erkennen kannst.

2. Gegeben ist die Funktion $f(x) = 2\sqrt{x} + 1$.
Bestimme mit Hilfe von mind. zwei kleinen Intervallen die Steigung an der Stelle $x_0 = 4$.

Zusatzfrage: Hat die Funktion $f(x) = 2\sqrt{x}$ bei $x_0 = 4$ eine kleinere, größere oder gleich große Steigung? Entscheide ohne Rechnung.

Arne Holst

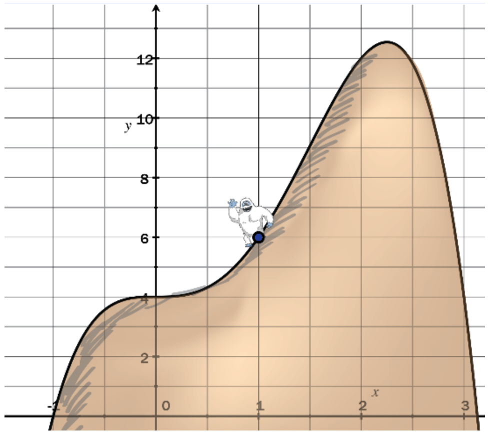
5.2 Die Steigung in einem Punkt

Der vorherige Abschnitt 5.1 hat den Begriff der mittleren Steigung eingeführt. Dazu benötigte man zwei Punkte und konnte mit dem üblichen Steigungsdreieck und/oder einer Rechnung diese mittlere Steigung berechnen.
Stell dir vor, dass du einen Graphen einer Funktion Punkt für Punkt abläufst. Wenn der Graph keine Gerade ist, dann wird es Punkte geben, an denen es anschaulich steiler (größere Steigung) oder flacher (kleinere Steigung) ist. Wie kann man aber überhaupt einem einzigen Punkt eine Steigung zuweisen? Braucht man dazu nicht mindestens zwei Punkte?

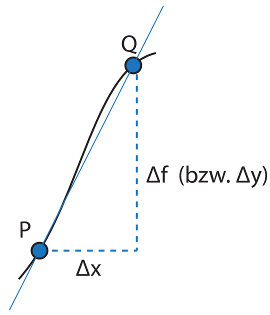
Wir betrachten dazu folgende Anwendungsaufgabe:

Der Yeti sucht in den Alpen nach einem Zweitwohnsitz und hat schon einen passenden Berg gefunden.

Das Profil des Bergs lässt sich mit Hilfe der Funktion $f(x) = 4 + 3x^3 - x^4$ darstellen.
Ein geeigneter Platz scheint für den Yeti der Punkt $P(1|6)$ zu sein. Allerdings möchte er es nicht zu steil haben. Wie groß ist die Steigung an dieser Stelle überhaupt?




Wir verwenden den Punkt $P(1|6)$ und ergänzen einen zweiten Punkt $Q$. Ist $Q$ nahe genug an $P$, so können wir die mittlere Steigung zwischen diesen Punkten als Näherungswert für die eigentlich gesuchte Steigung im Punkt $P$ verwenden.




| Intervall | mittlere Steigung |
|---|---|
| $[1; 1{,}5]$ | $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(1{,}5)-f(1)}{1{,}5-1} = \frac{9{,}0025-6}{1{,}5-1} = 6{,}125$ |
| $[1; 1{,}1]$ | $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(1{,}1)-f(1)}{1{,}1-1} = \frac{6{,}5289-6}{1{,}1-1} = 5{,}289$ |
| $[1; 1{,}01]$ | $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(1{,}01)-f(1)}{1{,}01-1} = \frac{6{,}050299-6}{1{,}01-1} = 5{,}0299$ |
| $[1; 1{,}001]$ | $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(1{,}001)-f(1)}{1{,}001-1} = \frac{6{,}005003-6}{1{,}001-1} = 5{,}003$ |

Man erkennt an diesen Beispielintervallen gut, dass eine Annäherung von $P$ an $Q$ dazu führt, dass sich die mittleren Steigungen immer mehr dem Wert 5 annähern.

Allgemein können wir also die Steigung in einem Punkt darauf zurückführen, dass wir zwei Punkte mit der mittleren Steigung verwenden und den Grenzwert dieser mittleren Steigungen beim Annähern der Punkte verwenden.