Hallo liebe 10dn!

Wir versuchen die unterrichtsfreie Zeit zu nutzen und starten direkt mit einem neuen Thema, da es jetzt nicht wirklich sinnvoll ist noch mehr Übungen zum Thema Stetigkeit zu machen.

Der hier vorliegende Text ist für das Regelheft gedacht und ist im Grunde eine Langfassung des Textes, der in kürzerer Form auch an die Tafel gekommen wäre. Druckt ihn aus, klebt ihn ein und – ganz wichtig – lest ihn auch durch!
Falls ihr zu einer Aufgabe Fragen habt, könnt ihr (und natürlich auch eure Eltern und Erziehungsberechtigen bei anderweitigen Problemen) mich unter der Emailadresse a.holst@pwg-merzig.de erreichen.

Wenn alles gelesen ist, versucht ihr euch danach an den Aufgaben 6, 7 und 8 a-c auf den Seiten 104 und 105.
(Eventuell werde ich nach der ersten Woche die Lösungen nachreichen, damit ihr euch selbst kontrollieren könnt.)

Damit seid ihr in dieser ersten Woche sicherlich schon gut versorgt. Kümmert euch bitte in ernsthafter Form um euer Hauptfach Mathematik.

Ich wünsche euch, dass ihr und auch eure Familien gesund bleiben und diese für uns alle ungewohnte Zeit gut überstehen.

Arne Holst

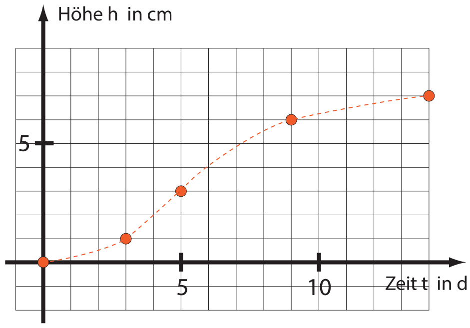
Kapitel 5: Steigung und Ableitung

5.1 Einführendes Beispiel

Angenommen du züchtest eine besondere Pflanze und protokollierst in unregelmäßigen Abständen die Höhe der Pflanze. Dann könnte vielleicht folgende Messtabelle entstanden sein:

Zeit t in Tagen	0	3	5	9	14
Höhe h in cm	0	1	3	6	7

Wie üblich können wir die Daten in einem Koordinatensystem darstellen:



Gehen wir von Messpunkt zu Messpunkt durch, ergeben sich bestimmte Zeitintervalle, in denen eine bestimmte Zunahme der Höhe erfolgte. Diese Änderungen der Höhe bezeichnen wir mit Δh.

Dann ergibt sich:

Intervall $[0;3]$ $\Delta h = h(3) - h(0) = 1$ Intervall $[3;5]$ $\Delta h = 2$

Intervall $[5;9]$ $\Delta h = 3$ Intervall $[9;14]$ $\Delta h = 1$

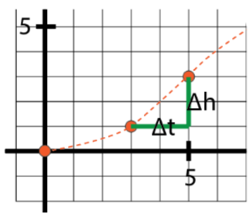
Interessiert man sich dafür, in welchem Intervall die Pflanze am schnellsten wuchs, so scheint zunächst die Wahl für das Intervall $[5;9]$ zu sprechen, denn dort finden wir das größte Δh. Dabei bleibt aber unberücksichtigt, dass das Intervall ja auch größer ist als z.B. das Intervall $[3;5]$.
Fairer wäre es in jedem Intervall das Höhenwachstum pro Tag zu bestimmen. Dazu betrachten wir neben Δh auch noch die Zeitspanne Δt und erhalten:

Intervall $[0;3]$ $\frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{1}{3} \approx 0{,}33 \quad \left(\frac{cm}{Tag}\right)$ Intervall $[3;5]$ $\frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{2}{2} = 1 \quad \left(\frac{cm}{Tag}\right)$

Intervall $[5;9]$ $\frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{3}{4} = 0{,}75 \quad \left(\frac{cm}{Tag}\right)$ Intervall $[9;14]$ $\frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{1}{5} = 0{,}2 \quad \left(\frac{cm}{Tag}\right)$

Diesen gerade berechneten Quotienten geben wir zwei neue, schicke Namen und sprechen entweder von einem Differenzenquotienten (=Division der Deltas) oder auch von einer Änderungsrate der Höhe (=wie ändert sich die Höhe in welcher Zeit).

Den größten Wert im grün markierten Intervall finden wir indirekt auch im Koordinatensystem wieder. Die Werte $\Delta h = 2$ und $\Delta t = 2$ können wir parallel zu den Achsen eintragen und gelangen zu einem bekannten Steigungsdreieck (evtl. hast du in der Mittelstufe auch die Bezeichnungen Δx und Δy schon gesehen).



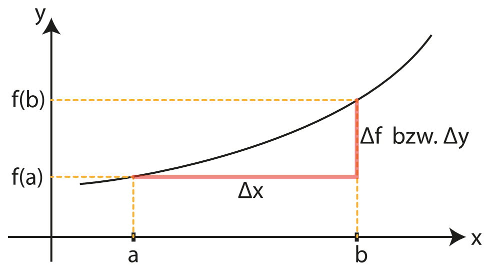
5.2 Der Differenzenquotient

Wir verallgemeinern das Vorgehen aus dem letzten Abschnitt und betrachten eine Funktion f ohne einen Kontext(Pflanzen, ...). Suchen wir uns auf der x-Achse zwei Stellen a, b mit $b > a$ aus, so kommen wir zu allem, was wir benötigen:
$[a; b]$ ist Intervall auf der x-Achse aus und $\Delta x = b - a$ die Breite des Intervalls.
Gleichzeitig können wir aber auch die Funktionswerte $f(a)$ und $f(b)$ betrachten und danach fragen, wie groß hier der Unterschied ist. Dies bezeichnen wir dann als Δf oder auch als Δy und es ist $\Delta f = f(b) - f(a)$.

Als Definition:

Es sei $f: D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $[a; b]$ ein Intervall in D.
Dann nennt man

$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ den Differenzenquotienten von f im Intervall $[a; b]$.



Einen solchen Quotienten kennen wir bereits vom Thema Steigungsdreieck. Dort wurde die Steigung einer Geraden folgendermaßen definiert: $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

Daher spricht man beim Differenzenquotienten auch von der mittleren Steigung von $\boldsymbol{f}$ im Intervall $[\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}]$.

Anders erklärt:
Denk dir ein Intervall $[a; b]$ und die Punkte $A(a|f(a))$ und $B(b|f(x))$ auf dem Graphen von f.
Legst du dann eine Gerade durch A und B, so hat diese Gerade genau die Steigung, die der Differenzenquotient von f für das Intervall angibt.
Eine Gerade, die durch zwei Punkte des Graphen verläuft heißt Sekante.

Beispiel: $f(x) = 1 + \sqrt{x}$, Intervall $[a; b] = [1; 4]$

Für die eingezeichnete Sekante gilt:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{3}$$

Die Sekante hat als Steigung also genau die mittlere Steigung des Graphen von f im Intervall $[1; 4]$.