Erweiterungskurs Mathematik

Teil 2: Analytische Geometrie

Inhaltsverzeichnis

1 Vektoren

1.1 Der Anschauungsraum

Der Beginn unserer gesamten Reise durch das Gebiet der analytischen Geometrie ist ein dreidimensionaler Raum, der durch drei Achsen aufgespannt wird. Zu den bekannten x- und y-Achsen ergänzen wir eine dritte z-Achse, die senkrecht zu beiden platziert ist und damit die dritte Dimension hinzufügt. Man spricht beim Aufbau der Achsen von einem *Rechtssystem*, da man Daumen, Zeige- und Mittelfinger der *rechten* Hand in dieser Reihenfolge entlang der x, y und z-Achse legt.
Mitunter wird statt der Bezeichnungen x, y und z auch x_1, x_2 und x_3 verwendet.

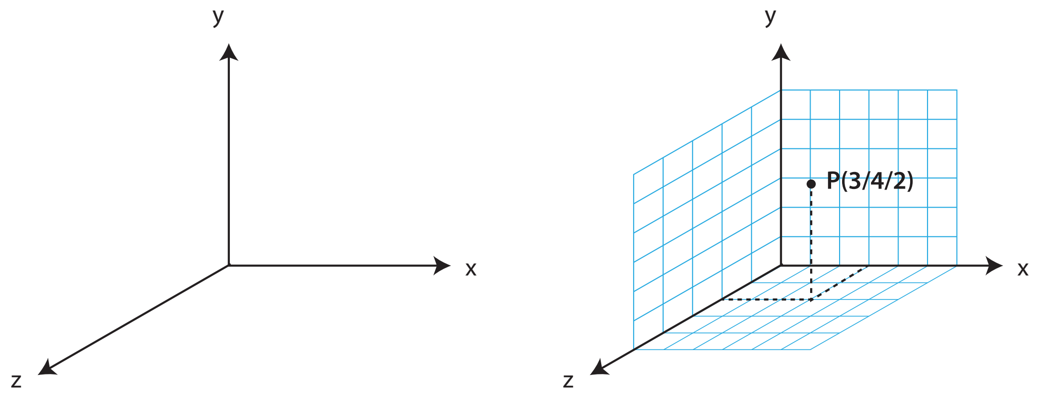

Abbildung 1.1: Dreidimensionales Koordinatensystem

Natürlich ist es auch möglich, die Achsen aus einer anderen Position zu betrachten oder die Achsen zeichnerisch anders darzustellen. Entscheidend bleibt dabei lediglich, dass bei allen Betrachtungsweisen das Rechtssystem erhalten bleibt:

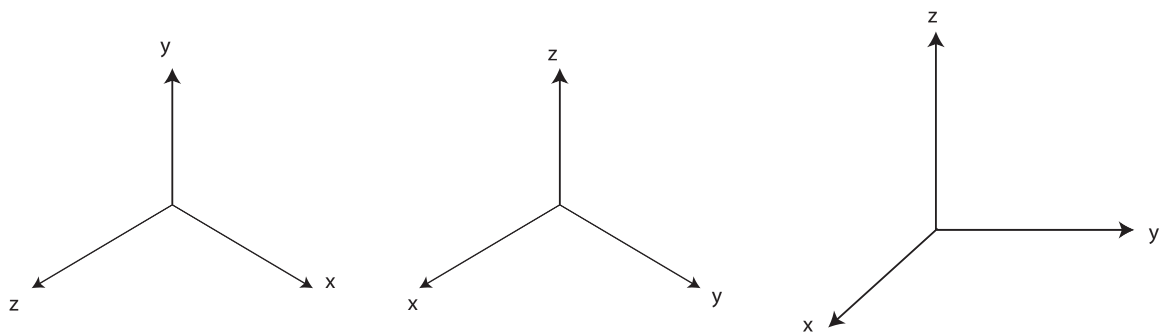

Abbildung 1.2: Alternative Darstellungen des Koordinatensystems

In diesem Raum gibt es Punkte, die wir durch Koordinaten angeben können: z.B. $P(1/3/0)$ oder allgemein $P(x/y/z)$.

Die Menge aller möglichen Punkte des Raumes heißt der *Anschauungsraum* $E = \{(x/y/z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$. Wählt man die z-Achse derart, dass sie in der zeichnerischen Darstellung nach oben zeigt, so lässt sich die z-Koordinate eines Punktes als eine Art Höhe über der x-y-Ebene interpretieren. Je höher ein Punkt liegt, desto größer ist dann seine z-Koordinate.

Aufgabe. a) Ein Würfel liegt so, dass eine seiner Ecke im Ursprung des Koordinatensystems liegt. Gib die restlichen sieben Punkte dieses Würfels an.
b) Welche Gemeinsamkeit in Bezug auf ihre Lage haben die Punkte $(1/2/3), (0/2/4), (-1/2/3)$?
c) Gib 5 Punkte an, die zusammen eine gerade, quadratische Pyramide bilden.
d) Wo liegen die Punkte $P(0/-a/a)$ mit $a \in \mathbb{R}$?

1.2 Verschiebungen und Vektoren

Ein Vektor steht für eine bestimmte Verschiebung eines Punktes zu einem anderen Punkt. Betrachten wir die folgende Darstellung:

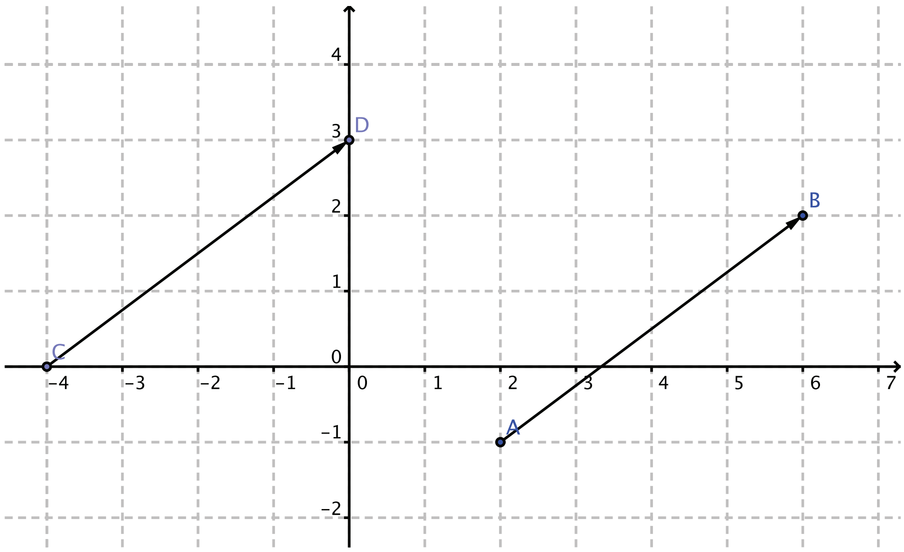

Abbildung 1.3: Gleiche Verschiebung zweier Punkte

Um C nach D zu schieben, müssen wir den Punkt 4 nach rechts und 3 nach oben bewegen. Die selbe Bewegung versetzt aber auch den Punkt A in den Punkt B . Bei beiden Bewegung (C nach D und A nach B) wirkt also die gleiche Verschiebung. Diese Verschiebung (auch Translation genannt) können wir in der Zeichnung als Pfeil darstellen und man erkennt, dass zu jeder Verschiebung bzw. zu jedem Verschiebungspfeil eine bestimmte Richtung und eine bestimmte Länge gehört. Solche Verschiebungen stellen wir in Zukunft als Vektor dar und schreiben:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

oder im dreidimensionalen Fall:

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Bemerkung. Einige Ergänzungen:

- Der Pfeil über dem Buchstaben wird Vektorpfeil genannt.

- Die Zahlen werden übereinander geschrieben, damit keine Verwechslung zwischen dem Punkt $P(4/3)$ (= fester Ort im Koordinatensystem) und der Verschiebung $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ besteht.
- Ein Vektor lässt sich mit einem Pfeil veranschaulichen. Beachte dabei aber, dass zu jedem Vektor nicht nur ein einziger Pfeil gehört. Solange man einen Vektorpfeil ohne Drehung verschiebt, repräsentiert er noch immer die gleiche Verschiebung.

1.3 Rechenregeln für Vektoren

In den Naturwissenschaften wird der Begriff Vektor immer dann verwendet, wenn man betonen möchte, dass man von einer Größe redet, die nicht nur ein bestimmtes Maß besitzt, sondern auch noch in eine gewisse Richtung weist. Größen mit Vektorcharakter sind z.B. die Geschwindigkeit, die Kraft oder die elektrische Feldstärke. Liegt eine Größe vor, bei der ein reiner Zahlenwert zur vollständigen Angabe reicht, so spricht man im Gegensatz zum Vektor von einem *Skalar*. Beispiele dafür sind die Zeit, die Temperatur, die Masse oder der pH-Wert.

Addition von Vektoren

Kräfte, die in verschiedenen Richtungen auf einen Körper wirken, lassen die Frage aufkommen, welche Gesamtkraft durch die einzelnen Kräfte entsteht. Wird ein Boot von einem Motor angetrieben und kommt gleichzeitig ein Wind dazu, der in eine andere Richtung treibt, so kann sich das Boot nicht aufteilen. In Physik lernt man, dass man die Gesamtkraft dadurch bestimmen kann, dass man den einen Kraftvektor an den anderen anhängt (vgl. Abbildung 1.4). Die Gesamtkraft wird als Summe der

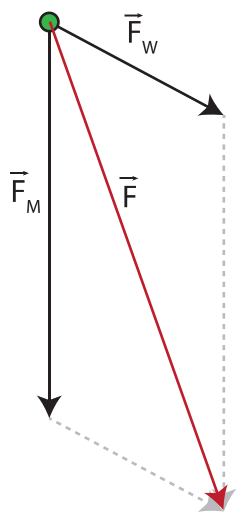

Abbildung 1.4: Addition von Kräften

beiden Kraftvektoren bezeichnet, d.h.

$$\vec{F} = \vec{F}_M + \vec{F}_W$$

Zu dieser anschaulichen, grafischen Addition fehlt noch die mathematische Definition. Betrachten wir im zweidimensionalen Fall einen beliebigen Punkt und lassen nacheinander die Vektoren $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ wirken, so ist offensichtlich, dass man damit die gesamte Verschiebung mit Hilfe des Vektors $\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ erhält.

Definition. Seien $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Dann ist die Addition dieser Vektoren definiert als

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$$

Beachte: Da die gewöhnliche Addition zweier Zahlen kommutativ (= vertauschbar) ist, ist auch die Vektoraddition kommutativ, d.h. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.

Subtraktion von Vektoren

Rechnerisch lässt sich die Subtraktion zweier Vektoren leicht definieren:

Definition. Seien $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Dann ist die Subtraktion dieser Vektoren definiert als

$$\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ a_3 - b_3 \end{pmatrix}$$

So weit, so einfach, allerdings bleibt die anschauliche Bedeutung zunächst unklar. Wenn eine Addition als Hintereinanderhängen von Vektoren zu verstehen ist, wie lässt sich dann die Subtraktion verstehen ?

Dazu betrachten wir das Beispiel mit $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$. Dann ist $\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$. Beim Betrachten dieser drei Vektoren fällt zunächst auf, dass $\vec{a} - \vec{b}$ in eine ganz andere Richtung zeigt, als $\vec{a}$ und $\vec{b}$. (vgl. Abbildung 1.5 links)

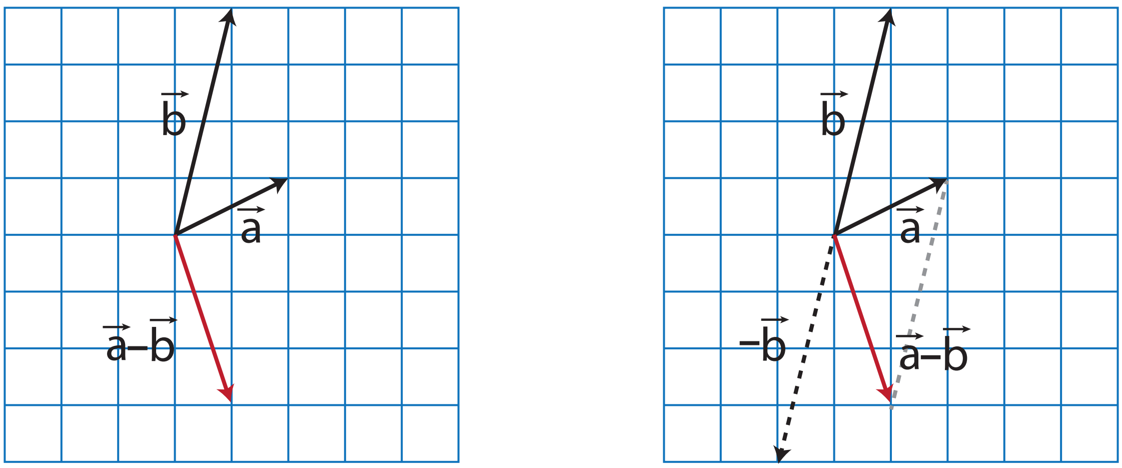

Abbildung 1.5: Subtraktion zweier Vektoren

Interpretiert man aber die Subtraktion als

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + \left(-\vec{b}\right)$$

so lässt sich erkennen, dass man zum Vektor $\vec{a}$ nur den Vektor $-\vec{b}$ addieren muss. Allerdings ist so etwas wie $-\vec{b}$ noch nicht definiert. Die Abbildung 1.5 (rechts) legt nahe, dass man $-\vec{b}$ als den Vektor deutet, der die zu $\vec{b}$ entgegengesetzte Verschiebung bewirkt.

Definition. Wir definieren: $-\vec{b} = -\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b_1 \\ -b_2 \\ -b_3 \end{pmatrix}$

Der Vektor $-\vec{b}$ ist dabei parallel zum Vektor $\vec{b}$, von gleicher Länge aber zeigt in die entgegengesetzte Richtung.

Vielfache eines Vektors (skalare Multiplikation)
Bei der üblichen Addition lässt sich ein Term der Form $x+x+x$ zusammenfassen zu $3x$. Entsprechend könnte man fordern, dass die Vektorsumme $\vec{a}+\vec{a}+\vec{a}$ ebenfalls eine Vereinfachung zu $3\vec{a}$ erlauben sollte. Auch anschaulich wird dies durch Aneinanderhängen der Vektoren deutlich (vgl. Abbildung 1.6): Die Summe $\vec{a}+\vec{a}+\vec{a}$ führt zu einem Vektor, der dreimal so lang wie $\vec{a}$ ist, dabei aber seine Richtung beibehält. Da wir aber bisher noch keinen Rechenanweisung der Art „Zahl mal Vektor“ zur Verfügung

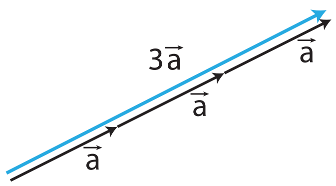

Abbildung 1.6: Vielfaches durch Aneinanderhängen

haben, definieren wir diese:

Definition. (Skalare Multiplikation oder S-Multiplikation)
Sei $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ und $s \in \mathbb{R}$. Dann ist die skalare Multiplikation einer Zahl (= Skalar) mit einem Vektor definiert als:

$$s \cdot \vec{a} = s \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \cdot a_1 \\ s \cdot a_2 \\ s \cdot a_3 \end{pmatrix}$$

Entsprechend gilt auch bei umgekehrter Reihenfolge:

$$\vec{a} \cdot s = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot s = \begin{pmatrix} s \cdot a_1 \\ s \cdot a_2 \\ s \cdot a_3 \end{pmatrix}$$

Anschaulich ergibt die skalare Multiplikation mit dem Faktor s einen Vektor, der immer noch in die gleiche Richtung zeigt, aber um s gestreckt bzw. gestaucht ist. Sollte zusätzlich noch $s < 0$ sein, so dreht sich die Richtung des Vektors um.

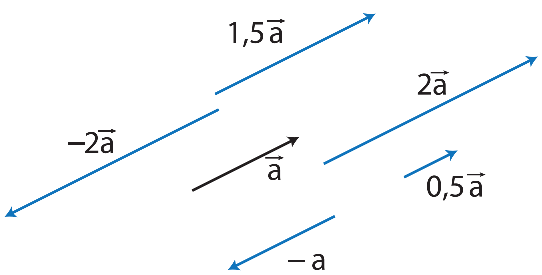

Abbildung 1.7: Vielfache des Vektors $\vec{a}$

Kombination der Rechenarten
Bringt man die bisherigen Rechenarten für Vektoren (Addition, Subtraktion, S-Multiplikation) zusammen, so kann es mitunter zu Fragen kommen, wie sich die Rechenarten miteinander vertragen. Betrachten wir dazu das folgende Beispiel:

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Offenbar werden beide Vektoren mit 3 multipliziert und anschließend addiert. Rechnet man in dieser Weise ohne die Ergebnisse wirklich auszurechnen, erhalten wir also:

$$\begin{pmatrix} 3 \cdot 1 \\ 3 \cdot 2 \\ 3 \cdot 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \cdot 4 \\ 3 \cdot 5 \\ 3 \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 + 3 \cdot 4 \\ 3 \cdot 2 + 3 \cdot 5 \\ 3 \cdot 3 + 3 \cdot 6 \end{pmatrix}$$

In jeder Zeile lässt sich jetzt der Faktor 3 ausklammern und wieder umschreiben:

$$\begin{pmatrix} 3 \cdot (1+4) \\ 3 \cdot (2+5) \\ 3 \cdot (3+6) \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1+4 \\ 2+5 \\ 3+6 \end{pmatrix}$$

Letzlich haben wir damit nachgewiesen, dass man einen gemeinsamen Faktor auch in der Vektorrechnung ausklammern darf, d.h.

$$s \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b} = s \cdot \left(\vec{a} + \vec{b}\right)$$

Entsprechend lassen sich folgende Aussagen formulieren:

Satz. *Seien $r, s \in \mathbb{R}$ und $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$. Dann gelten folgende Regeln:*

1. $(r \cdot s) \cdot \vec{a} = r \cdot (s \cdot \vec{a})$ (Assoziativgesetz)
2. $(r + s) \cdot \vec{a} = r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{a}$ (Distributivgesetz Variante I)
3. $r \cdot \left(\vec{a} + \vec{b}\right) = r \cdot \vec{a} + r \cdot \vec{b}$ (Distributivgesetz Variante II)

Beweis. Einfaches Nachrechnen durch Einsetzen von $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$. □

Insgesamt gesehen unterscheidet sich damit das Rechnen mit Vektoren nicht sonderlich vom Rechnen und Zusammenfassen mit Variablen. Einziger Unterschied ist die fehlende Multiplikation von Vektoren.

1.4 Ortsvektoren

Sind zwei Punkte A, B im Raum gegeben, so gibt es die Verschiebung, die den Punkt A in den Punkt B verschiebt. Den zugehörigen Vektor bezeichnen wir mit $\overrightarrow{AB}$ und sprechen von einem Verbindungsvektor.

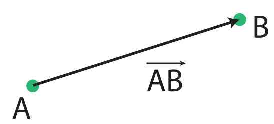

Abbildung 1.8: Verbindungsvektor von A nach B

Direkt ist dann klar:

$$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$$

Wählt man als Punkt A dabei den Ursprung des Koordinatensystems, so bezeichnet man den zugehörigen Vektor als *Ortsvektor*.

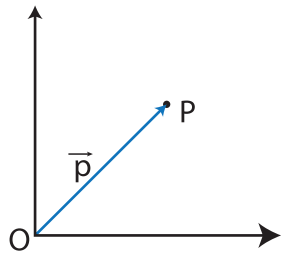

Abbildung 1.9: Ortsvektor

Definition. Der Vektor bzw. die Verschiebung, die den Koordinatenursprung in einen Punkt P verschiebt, heißt Ortsvektor von P .

Schreibweise: $\overrightarrow{OP}$ bzw. $\vec{p}$ und entsprechend für den Punkt A dann $\overrightarrow{OA}$ oder $\vec{a}$

Mit den neuen Ortsvektoren lassen sich direkt einfache Anwendungen finden:

Verbindungsvektoren mit Ortsvektoren berechnen

Bei einem Verbindungsvektor der Art $\overrightarrow{AB}$ lässt sich erkennen, dass man die gleiche Verschiebung auch anders erreichen kann. Man verschiebt erst von A zum Ursprung und danach vom Ursprung zu B. Da das Aneinanderhängen der Verschiebungen durch die Addition erreicht wird, erhalten wir die Gleichung:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}$$

Der Vektor $\overrightarrow{AO}$ verläuft dabei entgegengesetzt zum Ortsvektor $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$. Daher folgt weiter:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = -\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} - \vec{a}$$

Satz. *Für zwei beliebige Punkte A, B lässt sich der Verbindungsvektor $\overrightarrow{AB}$ mit Hilfe der Ortsvektoren der Punkte umformen als $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$.*

Dabei ist zu beachten, dass man bei den Ortsvektoren in genau umgekehrter Reihenfolge subtrahieren muss.

Beispiel. Gegeben sind die Punkte $S(2/4/-1)$ und $T(3/0/5)$. Für den Vektor $\overrightarrow{ST}$ gilt dann:

$$\overrightarrow{ST} = \vec{t} - \vec{s} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Bei einfachen Zahlen wie in diesem Beispiel kann man natürlich auch die drei Komponenten des Verbindungsvektors direkt ablesen, indem man sich in jeder Richtung die Ausgangskoordinate ansieht und dann überlegt, wie viel addiert/subtrahiert werden muss, um auf die Endkoordinate zu kommen. So ist in x-Richtung die Koordinate von S gleich 2 , während bei T eine 3 vorliegt. Offenbar muss dann bei der Bewegung von S nach T eine 1 addiert werden.

Der MIttelpunkt einer Strecke
Betrachten wir folgende Aufgabe:

Aufgabe. Zwei Raumstationen Alpha CX und Beta Taurus IV befinden sich an den Positionen $A(132/10/-50)$ und $B(802/-150/-252)$. Ein Signalverstärker zur Verbesserung der Kommunikation zwischen den Stationen soll so positioniert werden, dass er gleichen Abstand zu jeder Station besitzt und dieser gemeinsame Abstand möglichst gering ist. Welche Koordinaten hat der Signalverstärker ?

In dieser Aufgabe geht es geometrisch gesehen darum, in einem dreidimensionalen Raum den Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$ zu finden. Wir nennen diesen Mittelpunkt M . Um die Methoden der Vektorrechnung zu benutzen, werden wir oft gar nicht direkt die Koordinaten des Punktes bestimmen, sondern die Komponenten des zugehörigen Ortsvektors. Sobald wir aber $\vec{m}$ berechnet haben, haben wir im Grunde auch die Koordinaten von M gefunden. Dennoch besteht ein formaler Unterschied zwischen einem Punkt M und einem Ortsvektor $\vec{m}$.

Wir lösen die Aufgabe mit Hilfe von Ortsvektoren und zeichnen daher zunächst eine Skizze mit einem Koordinatenursprung. Die drei möglichen Ortsvektoren fügen wir ebenfalls hinzu:

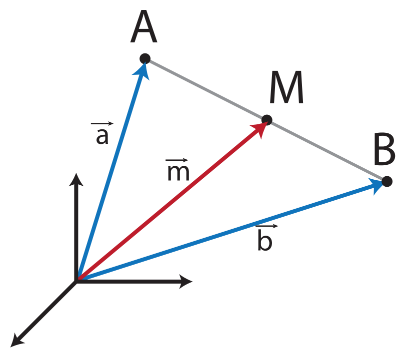

Abbildung 1.10: Mittelpunkt einer Strecke

Dann gilt:

$$\vec{m} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

Umgeschrieben in Ortsvektoren:

$$\vec{m} = \vec{a} + \frac{1}{2}\left(\vec{b} - \vec{a}\right) = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} = \frac{1}{2}\left(\vec{a} + \vec{b}\right)$$

Satz. *Für den Ortsvektor $\vec{m}$ zum Mittelpunkt M der Strecke $\overline{AB}$ gilt: $\vec{m} = \frac{1}{2}\left(\vec{a} + \vec{b}\right)$*

Bemerkenswert ist dabei, dass die Formel einer Art Mittelwert von Vektoren entspricht.

1.5 Der Betrag eines Vektors

Unter dem Betrag eines Vektors $\vec{a}$ versteht man die Länge des zugehörigen Vektorpfeils. Man schreibt dafür $|\vec{a}|$.
Bei zweidimensionalen Vektoren lässt sich der Betrag mit Hilfe des Satzes von Pythagoras bestimmen.

Beispiel. $\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$. Lassen wir den Vektor beispielsweise im Ursprung beginnen, so erhalten wir die Darstellung wie in Abbildung 1.11 und somit $|\vec{a}|^2 = 6^2 + 3^2 \quad \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{6^2 + 3^2} = \sqrt{45}$

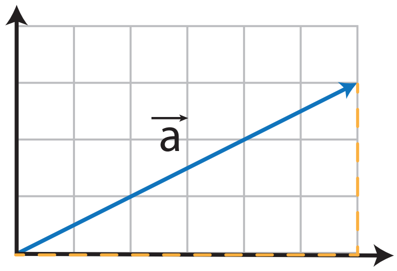

Abbildung 1.11: Betrag eines Vektors

Auch in drei Dimensionen kommen wir zu einem ähnlichen Ergebnis:

Beispiel. $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$. Wir ergänzen in der perspektivischen Zeichnung eine Hilfsstrecke d in der xy-Ebene.

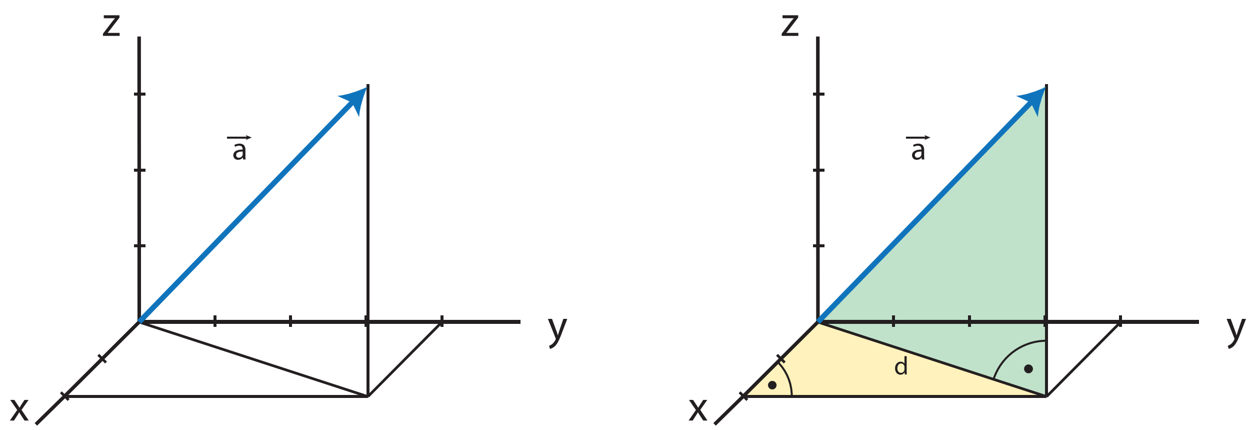

Abbildung 1.12: Betrag eines dreidimensionalen Vektors

Anschließend wenden wir zweimal den Satz des Pythagoras an (gelbes und grünes Dreieck) und setzen die Gleichungen ineinander ein:

$$d^2 = 2^2 + 4^2$$

und

$$|\vec{a}|^2 = d^2 + 5^2 = 2^2 + 4^2 + 4^2 \quad \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{36} = 6$$

Satz. *Der Betrag* $|\vec{a}|$ *eines dreidimensionalen Vektors* $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ *lässt sich berechnen als* $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$. *Im zweidimensionalen Fall* $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ *ergibt sich der Betrag in ähnlicher Weise als* $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$.

Anwendung des Betrages

Eine wichtige Anwendung des Betrages besteht darin, den Abstand zweier beliebiger Punkte A, B zu bestimmen. Die Länge des Verbindungsvektors $\overrightarrow{AB}$ (oder auch $\overrightarrow{BA}$) ist gerade der Abstand der beiden Punkte, d.h.

$$d(A, B) = |\overrightarrow{AB}| = |\vec{b} - \vec{a}|$$

Beispiel. Berechne den Abstand der beiden Punkte $P(1/2/4)$ und $Q(-3/-2/6)$.

Offenbar ist $\overrightarrow{PQ} = \vec{q} - \vec{p} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ und damit folgt:

$$d(P,Q) = \left| \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{16+16+4} = \sqrt{36} = 6$$

Bemerkung. Die Definition des Betrages zeigt, dass Beträge niemals negativ sind. Den kleinstmögliche Betrag erhalten wir, wenn der Term $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$ minimal ist. Dies gelingt durch die Wahl von $a_1 = a_2 = a_3 = 0$. Dann ist aber $\vec{a}$ auch schon der Nullvektor, d.h. der Nullvektor ist der einzige Vektor mit dem Betrag Null.

Einheitsvektoren

Unter einem *Einheitsvektor* versteht man einen Vektor mit einer Länge bzw. einem Betrag von Eins. Der Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist z.B. ein solcher Einheitsvektor, während der Vektor $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ mit dem Betrag $|\vec{b}| = \sqrt{9+16} = 5$ kein Einheitsvektor ist.
Aus dem Abschnitt über die skalare Multiplikation wissen wir aber, dass wir einen Vektor mit einem beliebigen Zahlenfaktor multiplizieren können und ihn dadurch anschaulich strecken oder stauchen können, ohne dass er prinzipiell von seiner Richtung abweicht. So wäre der Vektor

$$\vec{c} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 \\ 4/5 \end{pmatrix}$$

parallel zu $\vec{b}$und auf die Länge Eins gestaucht. Letztlich wurde der Vektor $\vec{b}$ durch seine eigene Länge dividiert und liefert damit einen Einheitsvektor in Richtung von $\vec{b}$.

Definition. Gegeben sei ein Vektor $\vec{a} \neq \vec{0}$ (und damit auch $|\vec{a}| \neq 0$). Dann erhält man einen Einheitsvektor $\vec{a}^0$, der parallel zu $\vec{a}$ ist, indem man $\vec{a}$ durch seinen eigenen Betrag dividiert, d.h.

$$\vec{a}^0 = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a}$$

2 Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit

2.1 Linearkombinationen

Sind mehrere Vektoren gegeben, so lassen sich mit den bisherigen Rechenregeln daraus neue Vektoren erzeugen, indem man die Vielfachen der Vektoren addiert. Sind beispielsweise die drei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ vorgegeben, so kann man daraus folgende Vektoren bilden:

$$\begin{aligned} \vec{x} &= 3\vec{a} + 2\vec{b} \\ \vec{y} &= -5\vec{a} + 6,2\vec{c} \\ \vec{z} &= \vec{a} - \vec{b} + \vec{c} \end{aligned}$$

Man spricht davon, dass die Vektoren $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ aus den Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ *linear kombiniert* wurden bzw. von den Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ *dargestellt* werden.

Definition. Sind $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ Vektoren und $r_1, r_2, \ldots, r_n \in \mathbb{R}$ beliebige Faktoren, so heißt ein Vektor der Form $r_1\vec{a}_1 + r_2\vec{a}_2 + \cdots r_n\vec{a}_n$ eine Linearkombination der Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$.

Anschaulich erhält man eine Linearkombination, indem man die Vielfachen der gegebenen Vektoren aneinanderhängt.

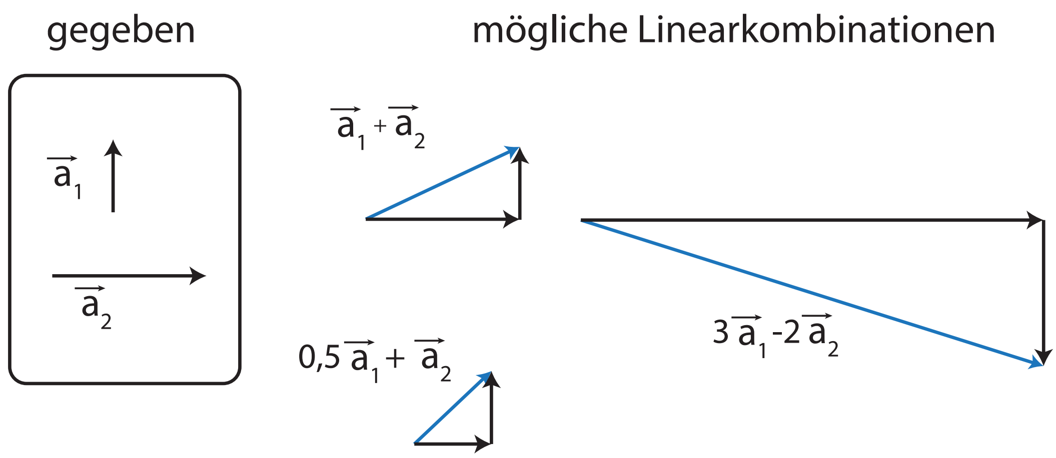

Abbildung 2.1: Linearkombinationen zweier Vektoren

Möchte man rechnerisch überprüfen, ob ein Vektor eine Linearkombination von anderen gegebenen Vektoren ist, so sind die Vorfaktoren $r_1, r_2, \ldots$ mit Hilfe der einzelnen Komponenten der Vektoren zu bestimmen.

Beispiel. Ist der Vektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ eine Linearkombination der Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$?

Wir wählen den Ansatz

$$\vec{x} = r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b}$$

und überprüfen, ob es solche Vorfaktoren wirklich gibt, bzw. welchen Wert sie haben.

$$\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Diese Gleichung wird Zeile für Zeile gelesen und ergibt drei einzelne Gleichungen:

$$\begin{aligned} 7 &= r + 2s \qquad (I) \\ 2 &= 2r - 2s \qquad (II) \\ 3 &= -r + 3s \qquad (III) \end{aligned}$$

Wir arbeiten zunächst nur mit den ersten beiden Zeilen und versuchen durch ein geeignetes Verfahren (Einsetzungsverfahren, Additionsverfahren, Gleichsetzungsverfahren) daraus r und s zu bestimmen. In diesem Falle führt ein direktes Addieren schnell zum Ziel. Wir erhalten dann:

$$9 = 3r \qquad (I + II) \quad \Leftrightarrow \quad r = 3$$

Mit einer der ersten beiden Zeilen ergibt sich dann sofort: $s = 2$
Diese beiden Werten müssen unbedingt noch mit der dritten, bislang ungenutzten Zeile überprüft werden.

$$Probe: \quad -r + 3s = -3 + 3 \cdot 2 = 3 \ (\checkmark)$$

Damit ist gezeigt, dass der gegebene Vektor eine Linearkombination der beiden anderen Vektoren ist. Es ist $\vec{x} = 3 \cdot \vec{a} + 2 \cdot \vec{b}$
Misslingt die Probe mit der dritten Zeile, so kann man schlussfolgern, dass der gegebene Vektor eben keine Linearkombination der beiden anderen ist.

Bemerkung. Es sei noch angemerkt:

- Jeder Vektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ ist immer eine Linearkombination der Vektoren $\vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Diese drei Vektoren zeigen ja entlang der Achsen und daher ist dann

$$\vec{x} = x_1 \cdot \vec{e_1} + x_2 \cdot \vec{e_2} + x_3 \cdot \vec{e_3}$$

- Die einzelnen Vorfaktoren können auch den Wert Null annehmen. Anders formuliert: Man muss nicht alle gegebenen Vektoren nutzen, um einen anderen Vektor als Linearkombination darzustellen. So ist $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$ natürlich eine Linearkombination der Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$, denn der gegebene Vektor ist bereits das Doppelte des ersten Vektors.

2.2 Linearkombinationen anschaulich gedeutet

Ein einzelner Vektor

Ist ein Vektor $\vec{a} \neq \vec{0}$ gegeben, so erhält man alle Linearkombination als $r \cdot \vec{a}$ und dies entspricht genau den Vielfachen von $\vec{a}$. Lässt man alle diese Vektoren an einem Punkt beginnen, so stellen sie eine Gerade parallel zu $\vec{a}$ dar. Somit spannt ein einzelner Vektor eine eindimensionale Gerade im Raum auf.

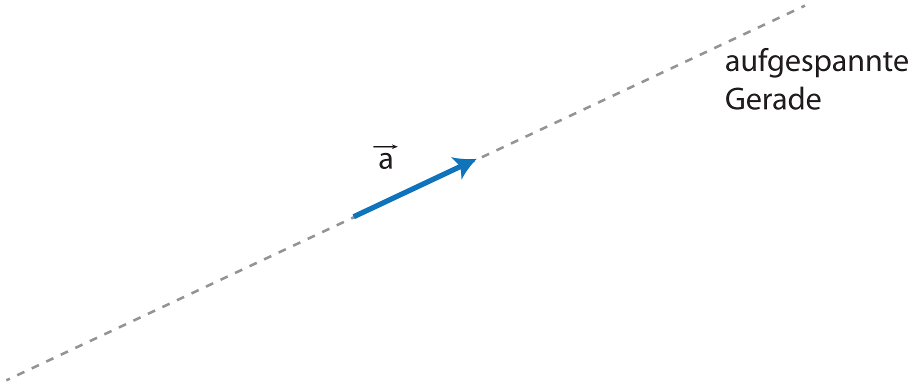

Abbildung 2.2: Aufgespannte Gerade

Zwei Vektoren

Bei zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ erhalten wir die Linearkombinationen als $r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b}$. Hier müssen wir unterscheiden.

Fall 1. Zeigt $\vec{b}$ genau in die gleiche Richtung wie $\vec{a}$ (d.h. die Vektoren sind Vielfache voneinander), so bleibt es bei den Linearkombinationen anschaulich bei einer Geraden. Solche Vektoren nennt man *kollinear* oder auch *linear abhängig*. Daher können wir definieren:
$\vec{a}, \vec{b}$ sind kollinear $\Leftrightarrow$ $\vec{a}, \vec{b}$ sind Vielfache voneinander $\Leftrightarrow$ $\vec{a} = k \cdot \vec{b}$

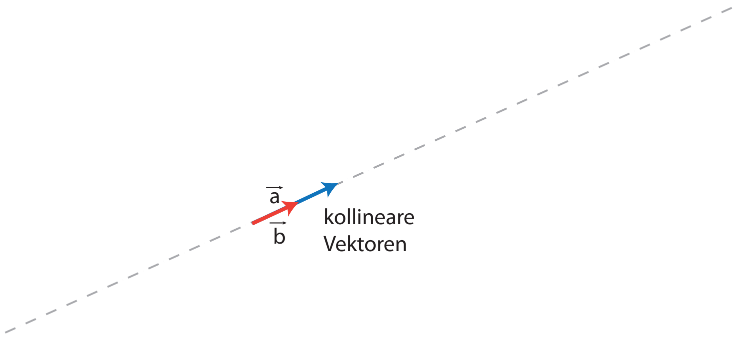

Abbildung 2.3: Kollineare Vektoren

Fall 2. Sind $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aber keine Vielfachen voneinander und zeigen in verschiedene Richtungen, so bildet die Menge der Linearkombinationen eine Ebene. Daher sagt man an dieser Stelle dann auch, dass die Vektoren eine "Ebene aufspannen". Bei einer derartigen Lage der Vektoren spricht man auch davon, dass die Vektoren *linear unabhängig* sind. Einfacher gesagt, hat in einem solchen Fall die eine Richtung nichts mit der anderen zu tun.

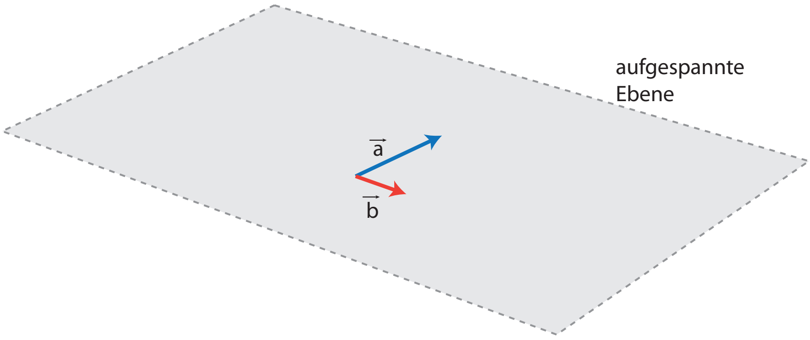

Abbildung 2.4: Aufgespannte Ebene

Drei Vektoren

Bei drei Vektoren wird die Lage etwas unübersichtlicher, da ja alle oder zwei Vektoren eventuell kollinear sind. Im bestmöglichen Fall zeigen die drei Vektoren in solche Richtungen, die sich nicht aus den jeweils anderen bereits ergeben. Dann nennt man alle drei Vektoren zusammen linear unabhängig. Wie man rechnerisch nachweist, ob drei gegebene Vektoren linear unabhängig sind, wird in einem späteren Abschnitt (Spatprodukt) gezeigt.

2.3 Das Lösen linearer Gleichungssysteme

Betrachten wir folgende Aufgabe:

Aufgabe. Gegeben sind die drei Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Stellen Sie den Vektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ als Linearkombination von $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ dar.

Zunächst scheint die Aufgabe wenig Probleme zu bereiten, denn mit dem Ansatz:

$$r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b} + t \cdot \vec{c} = \vec{x}$$

geht es dann nur noch darum, die drei Vorfaktoren r, s, t auszurechnen. Durch Einsetzen der gegebenen Vektoren und zeilenweises Lesen erhalten wir die drei Gleichungen:

$$\begin{array}{rcll} r + s + 4t & = & 3 & (I) \\ 2r + s - t & = & 0 & (II) \\ 3r + 2s - 2t & = & -2 & (III) \end{array}$$

Hier liegen drei Gleichungen mit drei Unbekannten vor und man spricht von einem linearen Gleichungssystem mit 3 Variablen. Zum Lösen solcher Gleichungssysteme gibt es ein Verfahren mit dem Namen "*Gaußscher Algorithmus*". Darunter versteht man eine nach dem Mathematik Carl Friedrich Gauß benannte Vorgehensweise, die es erlaubt die Gleichungen so umzuformen, dass man am Ende die Werte der drei Variablen ablesen kann. Der Algorithmus wird hier schrittweise am vorliegenden Beispiel erläutert:

Erster Schritt

Im ersten Schritt schreibt man die erste Zeile (I) ab und bringt die Zeilen (I/II) bzw. (I/III) so zusammen, dass die erste Variable sich weghebt. Im Beispiel kann man die erste Zeile mit 2 multiplizieren und danach die zweite Zeile subtrahieren ($2 \cdot I - II$). Auf ähnliche Weise kann man durch $3 \cdot I - III$ die Variable r wegheben. Dann erhält man als ersten Zwischenschritt:

$$\begin{array}{rcll} r+s+4t & = & 3 & (I) \\ s+9t & = & 6 & (II) \\ s+14t & = & 11 & (III) \end{array}$$

Zweiter Schritt

Man übernimmt die ersten beiden Zeilen und versucht mit Hilfe der Zeilen II und III die Variable s zu eliminieren. In diesem Beispiel gelingt das sehr einfach durch die Rechnung $II - III$. Es ergibt sich:

$$\begin{array}{rcll} r+s+4t & = & 3 & (I) \\ s+9t & = & 6 & (II) \\ -5t & = & -5 & (III) \end{array}$$

Dritter Schritt

Die Gleichung ist jetzt in einer Dreiecksgestalt, d.h. auf der linken Seite haben wir von Zeile zu Zeile eine Variable weniger. Aus der letzten Zeile können wir den Wert von t bestimmen. Damit gehen wir eine Zeile höher, setzen den Wert für t ein und können s berechnen. Zum Abschluss nehmen wir beide berechneten Werte und setzen sie in der allerersten Zeile ein. Dadurch können wir diese Zeile dann nach r auflösen. Man löst das Gleichungssystem von unten nach oben:

$$t = 1$$

Weiter in der Zeile darüber:

$$s + 9 = 6 \quad \Leftrightarrow \quad s = -3$$

und schließlich:

$$r + (-3) + 4 = 3 \quad \Leftrightarrow \quad r = 2$$

Damit ist das Gleichungssystem gelöst und wir erhalten zusammengefasst:

$$r = 2, s = -3, t = 1$$

bzw.

$$2 \cdot \vec{a} - 3 \cdot \vec{b} + \cdot \vec{c} = \vec{x}$$

3 Fortgeschrittene Vektorrechnung

3.1 Das Skalarprodukt

Bislang konnten wir Vektoren addieren und subtrahieren sowie mit Hilfe der skalaren Multiplikation ein Vielfaches eines Vektors bilden. In diesem Abschnitt definieren wir eine Multiplikation zwischen zwei Vektoren:

Definition. Es seien $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ zwei Vektoren des $\mathbb{R}^3$. Dann nennt man $\vec{a} \bullet \vec{b}$ das *Skalarprodukt* der beiden Vektoren und es gilt:

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

Die Namensgebung dieser Verknüpfung orientiert sich am Ergebnis der Multiplikation. Da also die Multiplikation zweier Vektoren in diesem Fall ein *Skalar* ist, spricht man vom *Skalar*produkt.
Handelt es sich bei $\vec{a}$ und $\vec{b}$ um zweidimensionale Vektoren, so definiert man entsprechend:

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

Beispiel. Ein Skalarprodukt kann positive und negative Werte liefern sowie Null sein, ohne dass eine einzige Null in einem Vektor auftritt:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 1 + 0 + 6 = 7 \qquad \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -12 + 5 + 1 = -6$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = 6 - 4 - 2 = 0$$

Eigenschaften des Skalarprodukts

Bei der bekannten Multiplikation zweier Zahlen kommt es auf die Reihenfolge der Faktoren nicht an ($4 \cdot 3 = 3 \cdot 4$), sie ist kommutativ. Insofern stellt sich bei der Einführung eines neuen Produkts die Frage, ob dieses auch kommutativ ist.

Satz. *Für alle $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ gilt: $\vec{a} \bullet \vec{b} = \vec{b} \bullet \vec{a}$, d.h. das Skalarprodukt ist kommutativ.*

Beweis. Durch einfaches Nachrechnen mit den Komponenten der Vektoren lässt sich zeigen:

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = b_1 a_1 + b_2 a_2 + b_3 a_3 = \vec{b} \bullet \vec{a}$$

$\square$

Entsprechend zum Kommutativgesetz kann man beginnen, andere von der gewöhnlichen Multiplikation bekannten Eigenschaften auch am Skalarprodukt zu überprüfen. So gab es in früheren Klassen oft die Möglichkeit des Ausmultiplizierens, d.h. $x\,(y+z) = xy + xz$. Der folgende Satz zeigt, dass sich auch dies für das Skalarprodukt übertragen lässt.

Satz. *Für alle $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ gilt: $\vec{a} \bullet \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a} \bullet \vec{b} + \vec{a} \bullet \vec{c}$, d.h. es gilt beim Skalarprodukt das Distributivgesetz.*

Beweis. Wieder liefert einfaches Nachrechnen die Gültigkeit des Satzes:

$$\begin{aligned} \vec{a} \bullet \left(\vec{b} + \vec{c}\right) &= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} b_1 + c_1 \\ b_2 + c_2 \\ b_3 + c_3 \end{pmatrix} = a_1\,(b_1 + c_1) + a_2\,(b_2 + c_2) + a_3\,(b_3 + c_3) \\ &= a_1b_1 + a_1c_1 + a_2b_2 + a_2c_2 + a_3b_3 + a_3c_3 \\ &= a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3 = \vec{a} \bullet \vec{b} + \vec{a} \bullet \vec{c} \end{aligned}$$

□

Wir fassen die beiden letzten Gleichungen sowie zwei weitere neue Eigenschaften zusammen:

Satz. *Für das Skalarprodukt gelten die folgenden Regeln:*

- Für alle $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ gilt: $\vec{a} \bullet \vec{b} = \vec{b} \bullet \vec{a}$ Kommutativgesetz
- Für alle $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ gilt: $\vec{a} \bullet \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a} \bullet \vec{b} + \vec{a} \bullet \vec{c}$ Distributivgesetz
- Für alle $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ und $s \in \mathbb{R}$ gilt: $(s \cdot \vec{a}) \bullet \vec{b} = s \cdot \left(\vec{a} \bullet \vec{b}\right)$ Verträglichkeit mit S-Multiplikation
- Für alle $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ gilt: $\vec{a} \bullet \vec{a} \geq 0$ und $\vec{a} \bullet \vec{a} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} = \vec{0}$ positive Definitheit

Beweis. Die ersten beiden Aussagen wurden bereits bewiesen. Die dritte Aussage lässt sich durch einfaches Nachrechnen mit Spaltenvektoren leicht bestätigen. Bei der vierten Aussage gehen wir wie folgt vor:

$$\vec{a} \bullet \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$$

Da Quadrate nie negativ sind, ergibt sich schon die Aussage: $\vec{a} \bullet \vec{a} \geq 0$.
Bei der genaueren Aussage bezüglich des Nullvektors folgt:

$$\vec{a} \bullet \vec{a} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a_1 = 0 \wedge a_2 = 0 \wedge a_3 = 0$$

Damit ist gezeigt, dass das Skalarprodukt eines Vektors mit sich selbst genau dann den Wert Null hat, wenn der Vektor selbst der Nullvektor ist. □

Nach all diesen bewiesenen Eigenschaften ist es an der Zeit danach zu fragen, wozu das Skalarprodukt eigentlich gut ist. Eine Anwendung ergibt sich aus den folgenden zwei Sätzen:

Satz. *Für jeden Vektor $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ gilt: $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$*

Beweis. Es sei $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$. Dann gilt:

$$\vec{a}^2 = \vec{a} \bullet \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = \left(\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\right)^2 = |\vec{a}|^2$$

□

Diese knappe Gleichung zeigt, dass es egal ist, ob man einen Vektor mit sich selbst multipliziert oder ob man seinen Betrag mit sich selbst multipliziert. Damit kann man das Quadrat eines Betrages durch ein Skalarprodukt ersetzen und auf die Betragsstriche verzichten. Übrigens ist es natürlich verlockend in der Gleichung $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$ noch durch Wurzelziehen weiter zu vereinfachen. Dann folgte allerdings die sinnlose Gleichung $\vec{a} = |\vec{a}|$, die behaupten würden, dass ein Vektor gleich einer Zahl sei. Daher kann man nicht einfach die Quadrate löschen. Korrekt umgeformt erhält man aber immerhin die Gleichung

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}$$

Aus diesem Satz können wir einen zweiten, wichtigen Satz folgern. Dabei geht es um zwei Vektoren, die einen Winkel einschließen. Um einen solchen Winkel zu erhalten, muss man die zugehörigen Vektorpfeile natürlich erst einmal am gleichen Punkt beginnen lassen. Dann merkt man aber schnell, dass zwei Vektoren nicht nur einen sondern sogar zwei Winkel bilden. (vgl. Abbildung 3.1).

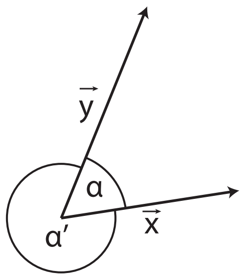

Abbildung 3.1: Zwei Winkel, die von zwei Vektoren eingeschlossen werden

Um Klarheit zu schaffen, welcher Winkel gemeint ist, definieren wir:

Definition. Es seien $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$ zwei Vektoren verschieden vom Nullvektor, die am gleichen Punkt beginnen. Als den von ihnen eingeschlossenen Winkel bezeichnen wir den kleineren der zwei gebildeten Winkel. Damit liegt dieser Winkel stets zwischen 0° und 180°.

Der gerade so eingeführte Winkel lässt sich mit Hilfe des Skalarproduktes einfach berechnen. Dazu dient der folgende Satz:

Satz. *Es seien $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$ zwei Vektoren, die - wenn man sie am gleichen Punkt beginnen lässt - den Winkel α einschließen. Dann gilt:*

$$\vec{x} \bullet \vec{y} = |\vec{x}| \cdot |\vec{y}| \cdot \cos(\alpha)$$

Beweis. Wir betrachten ein Dreieck, das aus den drei Vektoren $\vec{x}, \vec{y}$ und $\vec{y} - \vec{x}$ gebildet wird und in dem der Winkel α von den Vektoren $\vec{x}$ und $\vec{y}$ eingeschlossen wird.

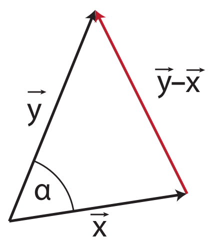

Abbildung 3.2: Betrachtetes Dreieck aus Vektoren

In diesem Dreieck gilt der Kosinussatz der Mittelstufe der damals lautete:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$$

und in dem der Winkel α der Seite a gegenüberlag. Wir passen diesen Satz an unser Dreieck an und verwenden zunächst die Beträge der Vektoren um die Längen im Satz korrekt wiederzugeben:

$$|\vec{y}-\vec{x}|^2 = |\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2 - 2|\vec{x}||\vec{y}|\cos(\alpha)$$

In dem zuvor behandelten Satz wurde gezeigt, dass es egal ist, ob man einen Vektor quadriert oder seinen Betrag. Insofern können wir sämtliche Quadrate von Beträgen ersetzen und erhalten:

$$(\vec{y}-\vec{x})^2 = \vec{x}^2 + \vec{y}^2 - 2|\vec{x}||\vec{y}|\cos(\alpha)$$

Die erste Klammer wird ausmultipliziert:

$$\vec{y}^2 - 2\vec{x}\bullet\vec{y} + \vec{x}^2 = \vec{x}^2 + \vec{y}^2 - 2|\vec{x}||\vec{y}|\cos(\alpha)$$

Die Terme $\vec{x}^2$ und $\vec{y}^2$ treten auf beiden Seiten auf, so dass wir die Gleichung vereinfachen können:

$$-2\vec{x}\bullet\vec{y} = -2|\vec{x}||\vec{y}|\cos(\alpha)$$

und schließlich:

$$\vec{x}\bullet\vec{y} = |\vec{x}||\vec{y}|\cos(\alpha)$$

$\square$

Ist keiner der beiden Vektoren in der letzten Gleichung der Nullvektor, so können wir die letzte Gleichung noch durch $|\vec{x}|$ und $|\vec{y}|$ dividieren und erhalten die Gleichung aufgelöst nach $\cos(\alpha)$.

Satz. *Es seien $\vec{x},\vec{y}\in\mathbb{R}^3$ zwei Vektoren ungleich dem Nullvektor. Dann gilt für den von ihnen eingeschlossenen Winkel α:*

$$\cos(\alpha)=\frac{\vec{x}\bullet\vec{y}}{|\vec{x}||\vec{y}|}$$

Mit dieser Gleichung und dem Arkuskosinus kann man den Winkel zwischen zwei Vektoren berechnen.

Beispiel. Wie groß ist der Winkel zwischen den Vektoren $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$ und $\vec{y}=\begin{pmatrix}0\\2\\-5\end{pmatrix}$?

Für den Winkel α zwischen ihnen gilt:

$$\cos(\alpha)=\frac{\vec{x}\bullet\vec{y}}{|\vec{x}||\vec{y}|}=\frac{\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}0\\2\\-5\end{pmatrix}}{|\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}||\begin{pmatrix}0\\2\\-5\end{pmatrix}|}=\frac{14}{3\cdot\sqrt{29}}\approx 0,8666$$

Also ist dann $\alpha = \arccos(0,8666) = 29,9^\circ$

Vorzeichen des Skalarproduktes

Die Gleichung $\vec{x}\bullet\vec{y} = |\vec{x}|\cdot|\vec{y}|\cdot\cos(\alpha)$ lässt sich auch unter dem Aspekt des Vorzeichens betrachten. Auf der rechten Seite sind die beiden Beträge niemals negativ, so dass das Vorzeichen alleine vom Term $\cos(\alpha)$ festgelegt wird. Der Kosinus ist für Winkel $< 90^\circ$ positiv und für Winkel $> 90^\circ$ negativ. Gehen wir die Fälle einzeln durch:

- $\alpha < 90°$
  Dann ist $\cos(\alpha) > 0$ und damit ist die rechte Seite der Ausgangsgleichung positiv. Folglich muss auch das Skalarprodukt positiv sein. Wir erhalten also die Aussage:
  $$\vec{x} \bullet \vec{y} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha < 90° \quad \Leftrightarrow \quad \alpha \text{ spitzer Winkel}$$

- $\alpha > 90°$
  Hier ist dann $\cos(\alpha) < 0$ und dadurch erhält die rechte Seite ein negatives Vorzeichen. Dadurch ist dann auch die linke Seite, d.h. das Skalarprodukt negativ und wir folgern:
  $$\vec{x} \bullet \vec{y} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha > 90° \quad \Leftrightarrow \quad \alpha \text{ stumpfer Winkel}$$

- $\alpha = 90°$
  In diesem Fall ist dann $\cos(\alpha) = \cos(90°) = 0$ und dann ist $\vec{x} \bullet \vec{y} = 0$.

Der letzte Fall bedarf einer genaueren Untersuchung:
Ist $\vec{x} \bullet \vec{y} = 0$, so bleibt folgende Schlussfolgerung:

$$\begin{aligned} |\vec{x}||\vec{y}|\cos(\alpha) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad |\vec{x}| = 0 \ \vee \ |\vec{y}| = 0 \ \vee \ \cos(\alpha) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \vec{x} = \vec{0} \ \vee \ \vec{y} = \vec{0} \ \vee \ \alpha = 90° \end{aligned}$$

Es gibt also drei Möglichkeiten, dass das Skalarprodukt den Wert Null ergibt. Zwei davon sind trival ($\vec{x}$, $\vec{y}$ als Nullvektor). Kann man dies ausschließen, d.h. ist keiner der beiden Vektoren der Nullvektor, so folgt dann auch schon $\alpha = 90°$. Mit anderen Worten: Dann stehen die beiden Vektoren senkrecht aufeinander. Dies halten wir als Satz fest.

Satz. *Für $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$ gilt:* $\quad \vec{x} \bullet \vec{y} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{x} \perp \vec{y}$

Am Skalarprodukt kann man demnach rasch erkennen, ob zwei Vektoren senkrecht zueinander sind. Hat man zwei aufeinander senkrecht stehende Vektoren gefunden, so spricht man auch von *orthogonalen Vektoren*. Um jetzt zu vermeiden, dass man ständig Ausnahmen für den Nullvektor machen muss bzw. vorab überprüfen muss, ob einer der beiden der Nullvektor ist, legt man fest, dass der Nullvektor auf allen anderen Vektoren senkrecht steht. Dann erhalten wir die Definition:

Definition. Für $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$ gilt: $\quad \vec{x}, \vec{y}$ sind orthogonal $\quad \Leftrightarrow \quad \vec{x} \bullet \vec{y} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{x} \perp \vec{y}$

Interpretation des Skalarprodukts

Mit den bisherigen Erkenntnissen können wir Skalarprodukte berechnen, den Winkel zwischen zwei Vektoren bestimmen und schnell überprüfen, ob zwei Vektoren senkrecht aufeinander stehen. Zum Abschluss dieses Abschnitts versuchen wir das Skalarprodukt von einer anderen Seite zu sehen. Betrachten wir dazu noch einmal die Gleichung

$$\vec{x} \bullet \vec{y} = |\vec{x}||\vec{y}|\cos(\alpha)$$

Die rechte Seite schreiben wir kurz um:

$$\vec{x} \bullet \vec{y} = |\vec{x}| \cdot (|\vec{y}|\cos(\alpha))$$

Der Term $|\vec{y}|\cos(\alpha)$ können wir in der Zeichnung 3.3 wiederfinden. Der Betrag $|\vec{y}|$ wird mit zwei Hilfslinien in Richtung von $\vec{x}$ und senkrecht dazu zu einem Dreieck ergänzt. Dann findet sich der Term $|\vec{y}|\cos(\alpha)$ als Anteil des Vektors $\vec{y}$ in Richtung von $\vec{x}$ wieder.

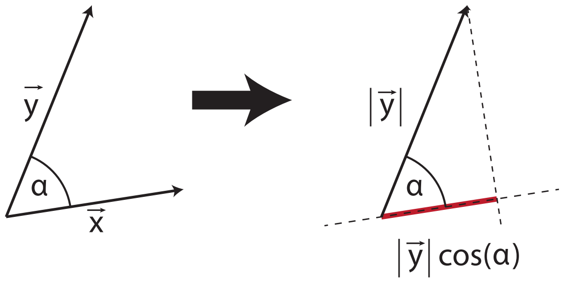

Abbildung 3.3: Anteil des Vektors $\vec{y}$ in Richtung von $\vec{x}$

Satz. *Für das Skalarprodukt gilt: $\vec{x} \bullet \vec{y}$ ist das Produkt aus der Länge $|\vec{x}|$ des einen Vektors und dem Anteil des anderen Vektors $\vec{y}$ in die Richtung von $\vec{x}$.*

Diese Eigenschaft des Skalarproduktes wird auch manchmal als Definition verwendet. Alle unserer hergeleiteten Eigenschaften müssen sich folglich in ihr wiederfinden. Exemplarisch sei nur kurz noch der Fall $\vec{x} \bullet \vec{y} = 0$ erwähnt. Wir hatten ja bereits erkannt, dass dann die beiden Vektoren aufeinander senkrecht stehen. Versucht man in einem solchen Fall den Anteil des Vektors $\vec{y}$ in Richtung von $\vec{x}$ zu finden, so wird man feststellen, dass es keinen solchen Anteil gibt. Auch hier stimmt die Anteilsrechnung mit unserer Skalarprodukt-Definition überein.

3.2 Das Vektorprodukt

Als weiteres Produkt für zwei Vektoren führen wir das sogenannte Vektorprodukt (auch Kreuzprodukt) ein.

Definition. Für $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$ gilt: $\vec{x} \times \vec{y} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix}$. Diese Verknüpfung zweier Vektoren wird Vektorprodukt oder auch Kreuzprodukt genannt.

Dieses neue Produkt wirkt auf den ersten Blick sehr furchterregend kompliziert. Klar ist zunächst nur sein Name, denn das Ergebnis ist in diesem Fall eben kein Skalar wie beim Skalarprodukt sondern ein Vektor. Bevor wir dazu kommen, warum man ein derartiges Produkt einführt, versuchen wir uns erst einmal die Berechnungen beim Vektorprodukt besser einzuprägen. Dazu gibt es drei Möglichkeiten:

1. Man denkt sich zwischen den Vektoren ein Kreuz, das bei jeder Komponente um Eins nach unten versetzt wird.

2. Die Vektoren werden zweimal untereinander geschrieben, die erste und letzte Zeile gestrichen und dann wird das Kreuz schrittweise nach unten gesetzt.

3. Man merkt sich den Term für das mittlere Kreuz $x_2y_3 - x_3y_2$ und erhöht die Indizes um 1. Nach 3 beginnt man erneut bei der 1. Diese Merkhilfe ist aber eher geeignet, um sich die allgemeine Berechnung zu merken und dauert in der Praxis zu lang !

Erste Eigenschaften (Antikommutativität)

Die Bedeutung des Vektorprodukts ergibt sich aus den Eigenschaften, die dieses spezielle Produkt mit sich bringt. Beginnen wir mit einer Überraschung:

Satz. *Das Vektorprodukt ist nicht kommutativ und nicht assoziativ.*

Beweis. Hier reicht es als Beweis ein spezielles Beispiel durchzurechnen. Überprüfen wir die Kommutativität:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Umgekehrt multipliziert ergibt sich aber nicht der gleiche Vektor:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Bei der Assoziativität müssen wir überprüfen, ob es bei zwei Multiplikationen auf die Reihenfolge der Vektorprodukte ankommt oder nicht. Sinnvollerweise verwenden wir die beiden obigen Vektoren und ergänzen nur noch einen dritten Vektor.

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Beginnen wir bei gleicher Reihenfolge der Vektoren mit der hinteren Multiplikation ergibt sich nicht der gleiche Vektor:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

□

Die üblichen Eigenschaften, die man also eigentlich von einem Produkt erwartet, gelten beim Vektorprodukt nicht. Die Beispielrechnung zur Kommutativität im Beweis ergab zwei verschiedene Vektoren, die sich nur in den Vorzeichen unterschieden haben. Dies gilt allgemein:

Satz. *Vertauscht man beim Vektorprodukt die zwei Vektoren, so ändert sich das Vorzeichen des Ergebnisses. Als Gleichung formuliert: Für $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$ gilt: $\vec{y} \times \vec{x} = -\vec{x} \times \vec{y}$ (Antikommutativität)*

Beweis. Mit $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ lässt sich die Gleichung direkt nachrechnen. □

Distributivgesetz und Verträglichkeit mit der S-Multiplikation

Bei der Überprüfung weiterer Eigenschaften, die wir auch beim Skalarprodukt untersucht haben, zeigt sich, dass das neue Vektorprodukt dann doch einige übliche Produkteigenschaften besitzt:

Satz. *Für das Vektorprodukt gilt das Distributivgesetz, d.h. für alle $\vec{x}, \vec{y}, \vec{a} \in \mathbb{R}^3$ gilt: $\vec{a} \times (\vec{x} + \vec{y}) = \vec{a} \times \vec{x} + \vec{a} \times \vec{y}$.*

Beweis. Der Beweis erfolgt durch direktes Nachrechnen mit den Komponenten der Vektoren. Es ist

$$\vec{a} \times (\vec{x} + \vec{y}) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2\,(x_3 + y_3) - a_3\,(x_2 + y_2) \\ a_3\,(x_1 + y_1) - a_1\,(x_3 + y_3) \\ a_1\,(x_2 + y_2) - a_2\,(x_1 + y_1) \end{pmatrix}$$

Da für übliche Zahlen das Distributivgesetz gilt, können wir die Klammern auflösen und die Terme umschreiben:

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} a_2x_3 + a_2y_3 - a_3x_2 - a_3y_2 \\ a_3x_1 + a_3y_1 - a_1x_3 - a_1y_3 \\ a_1x_2 + a_1y_2 - a_2x_1 - a_2y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2x_3 - a_3x_2 + a_2y_3 - a_3y_2 \\ a_3x_1 - a_1x_3 + a_3y_1 - a_1y_3 \\ a_1x_2 - a_2x_1 + a_1y_2 - a_2y_1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_2x_3 - a_3x_2 \\ a_3x_1 - a_1x_3 \\ a_1x_2 - a_2x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2y_3 - a_3y_2 \\ a_3y_1 - a_1y_3 \\ a_1y_2 - a_2y_1 \end{pmatrix} \\
&= \vec{a} \times \vec{x} + \vec{a} \times \vec{y}
\end{aligned}$$

□

Der Vollständigkeit halber sei erwähnt, dass sich das Vektorprodukt auch mit der alten S-Multiplikation verträgt. Auch das Skalarprodukt zeigte bereits diese Eigenschaft. Als Satz formuliert:

Satz. *Das Vektorprodukt ist verträglich mit der S-Multiplikation, d.h. für alle $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$ und alle $s \in \mathbb{R}$ gilt: $(s \cdot \vec{x}) \times \vec{y} = s \cdot (\vec{x} \times \vec{y})$*

Beweis. Nachrechnen mit Hilfe der Komponenten. □

Das Besondere am Vektorprodukt

Die bisherigen Eigenschaften wären als Begründung für die Neueinführung namens Vektorprodukt sicher noch nicht ausreichend. Erst der nächste Satz zeigt eine neue Besonderheit, auf die wir später oft zurückkommen werden.

Satz. *Für $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$ gilt: Das Vektorprodukt $\vec{x} \times \vec{y}$ ergibt einen Vektor, der sowohl auf $\vec{x}$ als auch auf $\vec{y}$ senkrecht steht.*

Beweis. Es sei $\vec{n} = \vec{x} \times \vec{y}$. Dann müssen wir zeigen, dass dieser Vektor $\vec{n}$ orthogonal zu den beiden anderen Vektoren ist, d.h. dass die beiden Skalarprodukte $\vec{n} \circ \vec{x}$ und $\vec{n} \circ \vec{y}$ beide Null sind. Dies lässt sich über die Komponenten der Vektoren nachrechnen:

$$\begin{aligned}
\vec{n} \circ \vec{x} &= \begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = (x_2y_3 - x_3y_2)\, x_1 + (x_3y_1 - x_1y_3)\, x_2 + (x_1y_2 - x_2y_1)\, x_3 \\
&= x_2y_3x_1 - x_3y_2x_1 + x_3y_1x_2 - x_1y_3x_2 + x_1y_2x_3 - x_2y_1x_3 \\
&= \underbrace{x_2y_3x_1}_{A} - \underbrace{x_3y_2x_1}_{B} + \underbrace{x_3y_1x_2}_{C} - \underbrace{x_1y_3x_2}_{A} + \underbrace{x_1y_2x_3}_{B} - \underbrace{x_2y_1x_3}_{C}
\end{aligned}$$

Die letzte Zeile führt zu lauter Termen die sich gegenseitig wegheben, so dass wir letztlich $\vec{n} \circ \vec{x} = 0$ erhalten. Eine ähnliche Rechnung mit Hilfe der Komponenten führt zur Gleichung $\vec{n} \circ \vec{y} = 0$. □

Wann immer wir also in Zukunft einen Vektor brauchen, der orthonal zu zwei anderen Vektoren sein soll, haben wir mit dem Vektorprodukt eine schnelle Methode zur Verfügung.
Überprüfen wir die Orthogonalität von des Vektorprodukts noch einmal in einem besonderen Situation: Mit $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ergibt die übliche Rechnung den Vektor $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Vergleicht man die Richtungen dieser drei Vektoren, so bilden die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{a} \times \vec{b}$ in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem. Dieser Zusammenhang gilt ebenso für beliebige Vektoren.

Satz. *Die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{a} \times \vec{b}$ bilden in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem. Die Lage der drei Vektoren im Raum zueinander kann man sich mit Hilfe der rechten Hand veranschaulichen:*

Abbildung 3.4: Rechtssystem mit dem Vektorprodukt

Flächeneigenschaft des Vektorprodukts

Eine letzte interessante Eigenschaft besitzt das Vektorprodukt, die direkt mit der Berechnung von Flächen zu tun hat. Diese Eigenschaft beweisen wir in mehreren, einzelnen Sätzen. (Im Grundkursbereich müssen die einzelnen Beweise nicht extra durchgegangen werden.)

Satz. *Für $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ gilt:* $|\ \vec{a} \times \vec{b}\ |^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - \left(\vec{a} \bullet \vec{b}\right)^2$.

Beweis. Wir zeigen die Aussage durch allgemeines Nachrechnen:

$$\begin{aligned}
|\ \vec{a} \times \vec{b}\ |^2 &= \left(\vec{a} \times \vec{b}\right)^2 = (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 \\
&= a_2^2b_3^2 - 2a_2a_3b_2b_3 + a_3^2b_2^2 + a_3^2b_1^2 - 2a_1a_3b_1b_3 + a_1^2b_3^2 + a_1^2b_2^2 - 2a_1a_2b_1b_2 + a_2^2b_1^2 \\
&= a_2^2b_3^2 + a_3^2b_2^2 + a_3^2b_1^2 + a_1^2b_3^2 + a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2 - 2a_2a_3b_2b_3 - 2a_1a_3b_1b_3 - 2a_1a_2b_1b_2 \\
&= a_2^2b_3^2 + a_3^2b_2^2 + a_3^2b_1^2 + a_1^2b_3^2 + a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2 + a_1^2b_1^2 + a_2^2b_2^2 + a_3^2b_3^2 \\
&\quad -a_1^2b_1^2 - a_2^2b_2^2 - a_3^2b_3^2 - 2a_2a_3b_2b_3 - 2a_1a_3b_1b_3 - 2a_1a_2b_1b_2 \\
&= \left(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2\right) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \\
&= |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - \left(\vec{a} \bullet \vec{b}\right)^2
\end{aligned}$$

□

Daraus lässt sich ein zweiter Satz ableiten:

Satz. *Für $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ und den von ihnen eingeschlossenen Winkel α gilt:* $|\ \vec{a} \times \vec{b}\ |^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 \sin^2(\alpha)$.

Beweis. Vom Skalarprodukt kennen wir die Gleichung $\vec{a} \bullet \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos(\alpha)$. Quadrieren wir beide Seiten, so erhalten wir: $\left(\vec{a} \bullet \vec{b}\right)^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 \cos^2(\alpha)$. Diesen Term können wir in das Ergebnis des vorherigen Satzes einsetzen:

$$\begin{aligned}
|\ \vec{a} \times \vec{b}\ |^2 &= |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - \left(\vec{a} \bullet \vec{b}\right)^2 \\
&= |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 \cos^2(\alpha) \\
&= |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 \left(1 - \cos^2(\alpha)\right) \\
&= |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 \sin^2(\alpha)
\end{aligned}$$

□

Bei der Gleichung des letzten Satzes treten nur Quadrate auf, so dass man versucht ist, auf sämtliche Quadrate zu verzichten. In dieser speziellen Gleichung gelingt dies, wie der folgende Satz beweist.

Satz. *Für $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ und den von ihnen eingeschlossenen Winkel α gilt:* $|\ \vec{a} \times \vec{b}\ | = |\vec{a}||\vec{b}| \sin(\alpha)$.

Beweis. In der Gleichung $|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 \sin^2(\alpha)$ ist der Term mit dem Sinus das einzige Quadrat, dass nicht problemlos fortgelassen werden kann. Da aber der Winkel α nicht irgendein Winkel ist, sondern ein Winkel der zwischen zwei Vektoren liegt, wird er maximal 180° groß. Dadurch wird der Sinus bei diesem Winkelbereich nie negativ und die im Satz genannte Gleichung korrekt. □

Flächenberechnungen

Interessanter als die Beweise, die zur Gleichung $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin(\alpha)$ führten, ist die Aussage des Satzes selber. Wir könnten die Gleichung zwar umstellen nach $\sin(\alpha)$ und damit dann den Winkel zwischen zwei Vektoren berechnen aber das geht mit dem Skalarprodukt dann doch schneller. Besser ist es hier noch einmal auf eine Zeichnung zurückzukommen, die wir am Rande des Themas Skalarprodukt gestreift haben und hier noch einmal wiedergegeben wird.

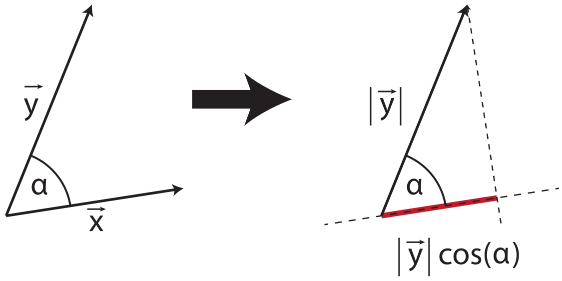

Abbildung 3.5: Anteil des Vektors $\vec{y}$ in Richtung von $\vec{x}$

Auf die gleiche Art kann man eine weitere Länge in der Abbildung identifizieren:

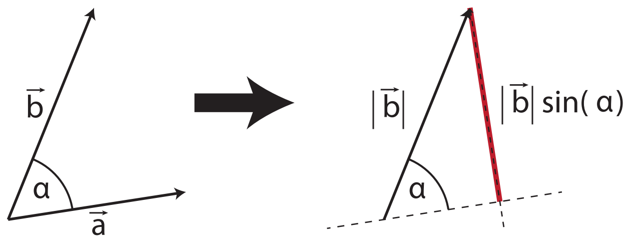

Abbildung 3.6: Zur Flächenberechnung beim Vektorprodukt

Ergänzt man noch eine dritte Seite zu einem Dreieck, so erkennt man die markierte Strecke als Höhe des Dreiecks.

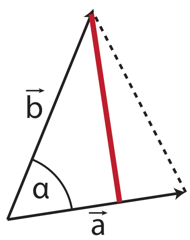

Abbildung 3.7: Von zwei Vektoren gebildetes Dreieck

Es lässt sich für den Flächeninhalt folgern:

$$A = \frac{1}{2}gh = \frac{1}{2}|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin(\alpha) = \frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}|$$

Es ergibt sich demnach die verblüffende Eigenschaft, dass das Kreuzprodukt zweier Vektoren nicht nur senkrecht auf den Ausgangsvektoren steht sondern sein Betrag auch noch etwas mit der von den Vektoren aufgespannten Fläche zu tun hat. Zusammengefasst als Satz:

Satz. *Es seien $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ zwei Vektoren. Dann gilt:*

a) Für den Flächeninhalt des von ihnen aufgespannten Dreiecks gilt: $A = \frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}|$.

b) Für den Flächeninhalt des von ihnen aufgespannten Parallelogramms gilt: $A = |\vec{a} \times \vec{b}|$.

Beweis. Der Satz in a) wurde bereits vorab bewiesen. Die zweite Aussage zum Parallelogramm ergibt sich daraus, dass man ein Parallelogramm in zwei kongruente Dreiecke zerlegen kann. Somit ist der Flächeninhalt in diesem Fall dann doppelt so groß wie beim Dreieck und der Vorfaktor 1/2 fehlt dann. □

3.3 Das Spatprodukt

Drei Vektoren können so im Raum liegen, dass sie zusammen ein räumliches Gebilde, einen sogenannten *Spat*, aufspannen. Dabei handelt es sich um einen Kör per, dessen sechs Außenflächen jeweils Parallelogramme sind. So gesehen sind Quader und Würfel besondere Formen eines Spats. Das Wort Spat ist in der deutschen Sprache kaum noch in Verwendung und taucht lediglich in zusammengesetzten Wörtern wie Feldspat oder Kalkspat (besondere Mineralformen) auf. Als Alternative gibt es in der Mathematik noch die Bezeichnung *Parallelepiped* (gesprochen als Parallel - Epi - Ped).

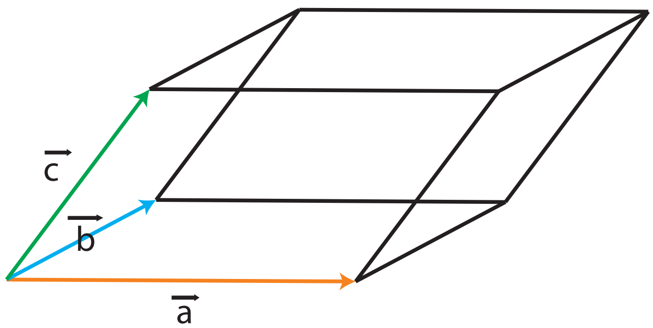

Abbildung 3.8: Aufgespannter Spat

Möchte man allgemein das Volumen eines solchen Spats berechnen, so reicht es aus, die Grundfläche G , die von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gebildet wird zu bestimmen und diese anschließend mit der auf G senkrecht stehenden Höhe h zu multiplizieren (vgl. Klasse 10: Körper, die durch wiederholte Stapelungen der Grundfläche entstehen).

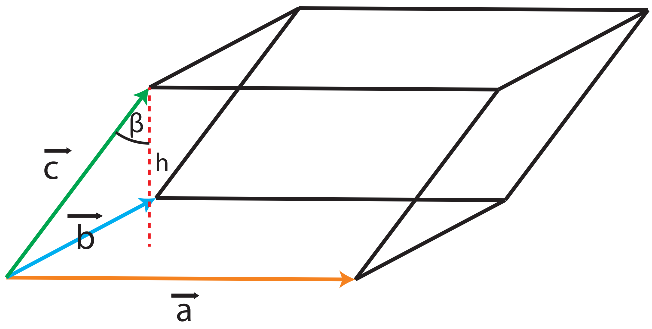

Abbildung 3.9: Spat mit eingezeichneter Höhe

Die unbekannte Höhe bildet mit dem Vektorpfeil von $\vec{c}$ den Winkel β. Verbindet man auch noch die anderen Endpunkte von h bzw. $\vec{c}$ entsteht ein rechtwinkliges Dreieck, in dem gilt:

$$cos\beta = \frac{h}{|\vec{c}|} \quad \Longleftrightarrow \quad h = |\vec{c}| \cos\beta$$

Ergänzt man in der Abbildung noch den Vektor $\vec{a} \times \vec{b}$, steht dieser (ähnlich wie h) senkrecht auf der von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Grundfläche G und bildet ein weiteres Mal den Winkel β.

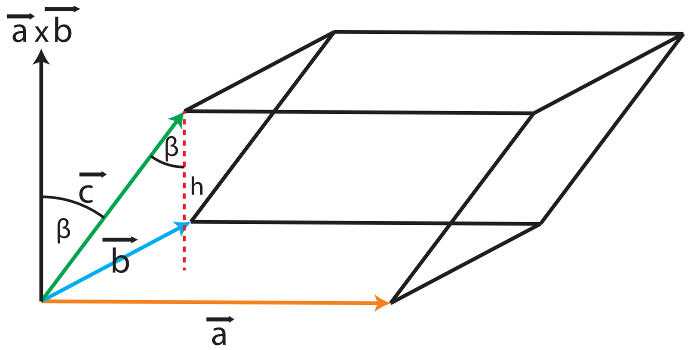

Abbildung 3.10: Spat mit Höhe und Kreuzprodukt

Fassen wir zusammen:

1. $V = G \cdot h$
2. $G = |\vec{a} \times \vec{b}|$
3. $h = |\vec{c}| \cos(\beta)$

Und damit erhalten wir insgesamt in diesem Fall: $V = |\vec{a} \times \vec{b}||\vec{c}| \cos(\beta) = \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \bullet \vec{c}$
Man definiert daher an dieser Stelle:

Definition. Für drei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ heißt $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \bullet \vec{c}$ das *Spatprodukt* dieser drei Vektoren.

Bevor wir jetzt zu schnell folgern, dass das Spatprodukt dem Volumen des aufgespannten Spats entspricht, werfen wir einen Blick auf die folgende Abbildung.

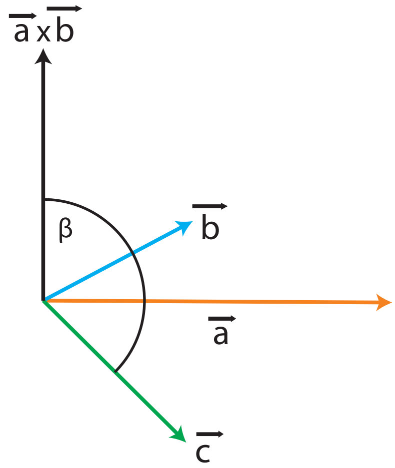

Abbildung 3.11: Spat mit anderer Richtung von $\vec{c}$

Dort zeigt der Vektor $\vec{c}$ im Gegensatz zu den bisherigen Zeichnungen anschaulich gesprochen von der Grundseite „nach unten". Da sich aber $\vec{a} \times \vec{b}$ nicht verändert hat, bilden der Vektor $\vec{c}$ und $\vec{a} \times \vec{b}$ einen Winkel größer als 90°. Dadurch ist dann das Skalarprodukt dieser beiden Vektoren negativ, d.h. das Spatprodukt $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \bullet \vec{c}$ ist negativ. Das ist zwar nicht weiter tragisch zeigt aber dennoch, dass man zur Sicherheit bei der Berechnung des Volumens noch Beträge setzen muss.

Satz. *Für das Volumen des von den Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ aufgespannten Spats gilt:* $V = \left| \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \bullet \vec{c} \right|$.

Betrachtet man die Situation mit den 3 Vektoren etwas genauer, so kommt man schnell zur Einsicht, dass der aufgespannte Spat nicht wirklich immer als dreidimensionales Gebilde entsteht. Schließlich könnte der Vektor $\vec{c}$ ja so liegen, dass er gar nicht die von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannte Grundfläche verlässt. Wir halten fest:

Bemerkung. Die drei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ liegen in einer Ebene $\quad\Leftrightarrow\quad$ Das Volumen des Spats ist gleich Null.

4 Geraden und Geradengleichungen

4.1 Vektorielle Geradengleichung

Im gesamten restlichen Inhalt der Analytischen Geometrie wird es um die beiden grundlegenden Begriffe „Gerade“ und „Ebene“ und deren Lage zueinander im dreidimensionalen Raum gehen. Um mit Geraden und Ebenen zu rechnen (dies ist ja *analytische* Geometrie) benötigen wir eine Art von Gleichung so wie sie früher die Gleichung $y = mx + n$ darstellte.
Eine solche Gleichung konnte in der Mittelstufe auf zwei Arten gelesen werden:

- Sie beinhaltet verschiedene Zahlen, die eine gewisse Bedeutung haben. So ist m die Steigung und n der Achsenabschnitt. Kennt man diese beiden entscheidenden Größen, so kann man sofort die Geradengleichung aufschreiben.
- Sie dient als eine Art Test für ein Punktepaar (x/y) , so dass man mit der Gleichung überprüfen kann, ob ein Punkt zur Geraden gehört oder nicht.

Beide Eigenschaften werden auch vektorielle Geradengleichungen aufweisen.

Herleitung der Geradengleichung

Wie bisher ist eine Gerade auch im Raum dadurch eindeutig festgelegt, dass man zwei ihrer Punkte angibt. Eine weitere Möglichkeit besteht bei der Verwendung von Vektoren in der Angabe eines Punktes und einer Richtung, in die die Gerade verläuft.

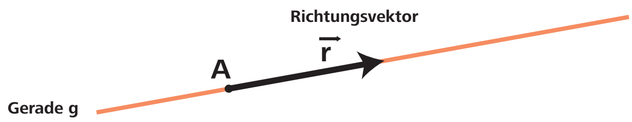

Abbildung 4.1: Gerade mit Punkt A und gegebener Richtung

Um zu einer Gleichung für diese Gerade zu kommen, wählen wir uns einen beliebigen Punkt X und überlegen, ob wir mit Hilfe von A und $\vec{r}$ ausdrücken können, wann genau X auf der Geraden liegt. Dazu ergänzen wir den Ursprung, damit wir auch die Ortsvektoren $\vec{a}$ und $\vec{x}$ zur Verfügung haben:

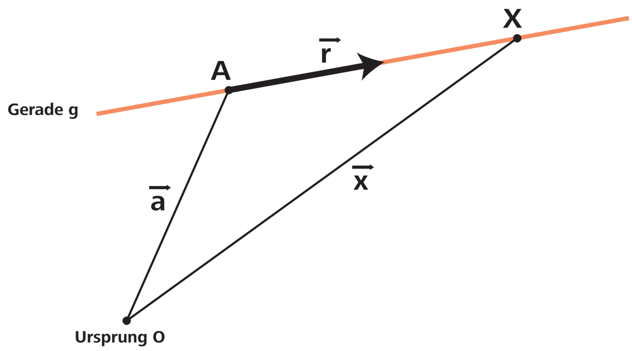

Abbildung 4.2: Gerade mitsamt Ursprung

Offenbar gilt:

$$\begin{aligned} & \text{X liegt auf der Geraden g } (X \in g) \\ \Leftrightarrow\ & \overrightarrow{AX} \text{ ist ein Vielfaches von } \vec{r} \\ \Leftrightarrow\ & \overrightarrow{AX} = s \cdot \vec{r} \\ \Leftrightarrow\ & \vec{x} - \vec{a} = s \cdot \vec{r} \\ \Leftrightarrow\ & \vec{x} = \vec{a} + s \cdot \vec{r} \end{aligned}$$

Die letzte Zeile lässt sich so deuten, dass wir jeden Punkt X auf der Geraden so erhalten können, indem wir bei A starten und von dort aus ein beliebiges Vielfaches $s \cdot \vec{r}$ des Vektors $\vec{r}$ ablaufen. Dabei liefert uns jede Zahl $s \in \mathbb{R}$ genau einen Ortsvektor $\vec{x}$ (bzw. dann auch einen Punkt X) und umgekehrt liegt ein Punkt X genau auf der Geraden, wenn wir zu $\vec{x}$ eine Zahl s finden, so dass die Gleichung stimmt.

Definition. *Geradengleichung*
Eine Gerade ist die Menge aller Vektoren $\vec{x}$, die die Gleichung $\vec{x} = \vec{a} + s \cdot \vec{r}$ mit $s \in \mathbb{R}$ erfüllen. Wir schreiben dafür kürzer: $g: \ \vec{x} = \vec{a} + s \cdot \vec{r}$.
Dabei heißt $\vec{a}$ *Stützvektor* und der zugehörige Punkt A heißt *Aufpunkt*. Der Vektor $\vec{r}$ wird *Richtungsvektor* genannt.
$\vec{a}$ und $\vec{r}$ sind in der Gleichung konstant, nur s lässt sich wählen. Daher spricht man auch von einer *Parametergleichung* einer Geraden mit s als *Parameter*.

Sind zwei Punkte im Raum gegeben und sucht man eine Gleichung für die Gerade, die durch die beiden Punkte verläuft, so kann man einen der beiden Punkte als Aufpunkt wählen und nimmt als Richtungsvektor schlicht den Verbindungsvektor der Punkte.

Beispiel. Gegeben sind die Punkte $A(1/4/-2)$ und $B(4/2/0)$. Dann lautet eine mögliche Gleichung der Geraden g , die durch A und B verläuft:

$$\vec{x} = \vec{a} + r \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Es bleibt anzumerken, dass die Gleichung einer Geraden nicht eindeutig ist. Hätte man im letzten Beispiel B als Aufpunkt gewählt und als Richtungsvektor dann $\overrightarrow{BA}$, so wäre eine andere Gleichung entstanden, die dennoch die gleiche Gerade beschreibt:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Da es beim Richtungsvektor nur generell um die Richtung geht und die Länge des Richtungsvektors nicht entscheidend ist, darf man den Richtungsvektor auch stets so einfach wie möglich gestalten. Statt des Vektors $\begin{pmatrix} 12 \\ -9 \\ -3 \end{pmatrix}$ wäre also $\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ genau so als Richtungsvektor geeignet. Beim Aufpunkt bzw. Stützvektor darf dagegen nicht vereinfacht werden, da es ja beim Aufpunkt nicht um eine Richtungsangabe geht, sondern darum einen bestimmten Punkt im Raum festzulegen. Ändert man diesen Punkt, so startet die Gerade an einer ganz anderen Stelle im Raum.

4.2 Lage zweier Geraden im Raum

Betrachten wir zwei beliebige Geraden im dreidimensionalen Raum, so fallen uns schnell verschiedene Möglichkeiten ein, wie die zwei Geraden zueinander liegen können.

- Die Geraden können parallel zueinander sein. Das Wort "parallel" beinhaltet (anders als die meisten es vermuten) auch den besonderen Fall, dass die beiden Geraden identisch sind. Eine Gerade ist demnach auch zu sich selbst parallel. Besser ist es also, wenn wir hier von "echt parallel" sprechen, wenn wir zwei verschiedene Geraden meinen.
- Die Geraden können identisch sein.
- Die Geraden können sich in einem Punkt schneiden.

Bei Geraden in der Mittelstufe sind das die einzigen Fälle, die auftreten. Im dreidimensionalen Raum besteht für Geraden aber die Möglichkeite nicht parallel zu sein und dennoch keinen Schnittpunkt aufzuweisen. Anschaulich denke man sich die eine Gerade als Autobahn, während die zweite Gerade einer Brücke entspricht, die über die Autobahn führt. Geraden, die derart im Raum liegen, werden *windschief* genannt. Also ergänzen wir noch:

- Die Geraden können windschief sein.

Die Abbildung 4.3 zeigt noch einmal die verschiedenen Fälle:

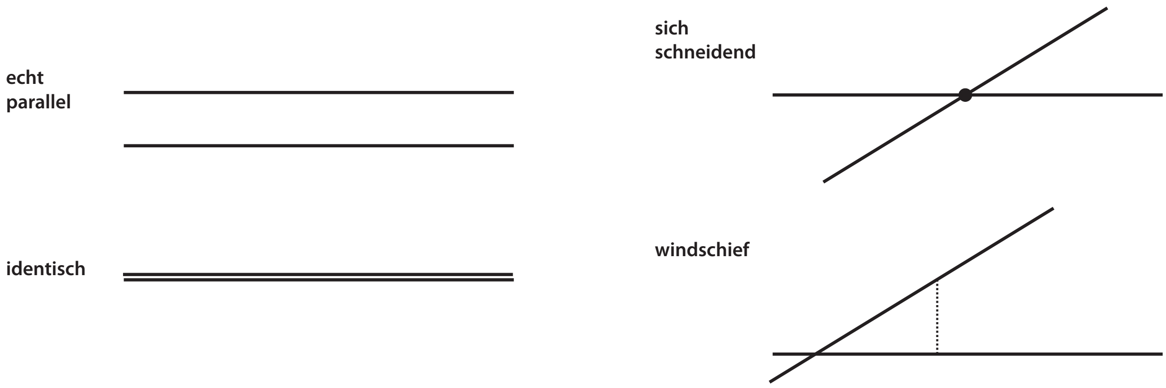

Abbildung 4.3: Mögliche Lage zweier Geraden im Raum

Üblicherweise hat man aber keine grafische Darstellung der beiden Geraden vorliegen, sondern lediglich die zugehörigen Geradengleichungen gegeben. Wir betrachten also ganz allgemein die zwei Geraden mit den Gleichungen:

$$g: \ \vec{x} = \vec{a}_g + s \cdot \vec{r}_g, \qquad h: \ \vec{x} = \vec{a}_h + t \cdot \vec{r}_h$$

Überprüfung auf parallele Lage

Sehr leicht lässt sich die Parallelität von zwei Geraden erkennen:

Bemerkung. Zwei Geraden sind genau dann parallel, wenn ihre Richtungsvektoren parallel sind. Kurz ausgedrückt:

$$g \parallel h \ \Leftrightarrow \ \vec{r}_g \parallel \vec{r}_h \ \Leftrightarrow \ \vec{r}_g \text{ ist ein Vielfaches von } \vec{r}_h$$

Ein einfacher Blick auf die Richtungsvektoren zeigt also, ob sie Vielfache voneinander sind (und damit parallel) oder nicht. Sind die Geraden parallel, so kann man mit Hilfe einer *Aufpunktprobe* entscheiden, ob sie echt parallel oder identisch sind. Dazu wählt man den Aufpunkt einer der beiden Geraden und prüft nach, ob er gleichzeitig auch auf der anderen Geraden liegt. Je nachdem sind die Geraden dann echt parallel (Aufpunktprobe schlägt fehl) oder identisch (Aufpunktprobe gelingt).

Überprüfung auf Schnittpunkte Sind die beiden Geraden durch Überprüfung der Richtungsvektoren schon als nichtparallel erkannt, geht es dann nur noch darum die Fälle "windschief" und "sich schneidend" rechnerisch zu unterscheiden. Dazu rechnet man nach, ob es einen Schnittpunkt gibt, indem man die Geradengleichungen gleichsetzt und dadurch versucht einen bestimmten Schnittpunkt auszurechnen kann.

Beispiel. Gehen wir das Vorgehen noch einmal an einem konkreten Beispiel durch. Es seien $g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $h:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ die beiden vorliegenden Geradengleichungen.

Offenbar sind die beiden Geraden nicht parallel ($\vec{r}_g \neq k \cdot \vec{r}_h$) und daher prüfen wir nach, ob es einen Schnittpunkt gibt, indem wir die Gleichungen gleichsetzen:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Wir verwenden zunächst nur die ersten beiden Zeilen um daraus die beiden Parameter s und t zu berechnen:

$$\begin{aligned} 4 - 3s &= 1 \\ 2 + 2s &= 1 + t \end{aligned}$$

Als Lösung ergibt sich:

$$s = 1, \quad t = 3$$

Letztlich sollen natürlich alle drei Zeilen stimmen, so dass wir mit den berechneten Werten eine Probe in der dritten, bislang unbenutzten Zeile durchführen:

$$\begin{aligned} links:\ 0 - 2s &= -2 \\ rechts:\ 4 - 2t &= 4 - 6 = -2 \end{aligned}$$

Wir erkennen, dass beide Seiten den gleichen Wert annehmen. Somit haben wir eine einzige, eindeutige Lösung und damit einen einzigen Schnittpunkt. Die Geraden schneiden sich bei

$$\vec{x}_s = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

bzw. im Punkt $X_S(1/4/-2)$.

4.3 Schnittwinkel zweier Geraden

Besitzen zwei Geraden einen einzigen Schnittpunkt, so kann man danach fragen, unter welchem Winkel α_S sie sich schneiden. Lässt man die beiden Richtungsvektoren am Schnittpunkt beginnen, so scheint zunächst klar zu sein, dass die beiden Vektoren genau den gesuchten Winkel α einschließen.

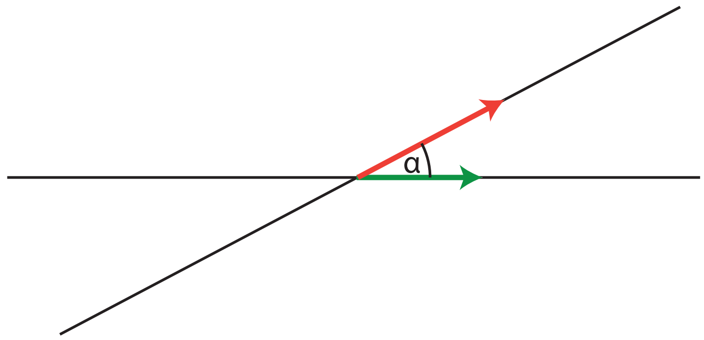

Abbildung 4.4: Schnittwinkel zweier Geraden

Nennen wir die beiden Richtungsvektoren $\vec{r}_g$ und $\vec{r}_h$, so gilt:

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{r}_g \bullet \vec{r}_h}{|\vec{r}_g| \cdot |\vec{r}_h|}$$

und daraus erhält man dann den gesuchten Schnittwinkel. Dabei haben wir uns aber zum Teil von der Zeichnung täuschen lassen, denn ändern wir nur die Orientierung eines Vektors, so bleiben es die gleichen Geraden, aber der Winkel zwischen den Vektoren ändert sich.

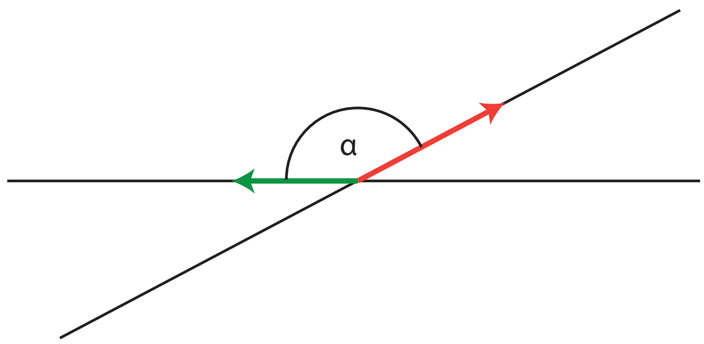

Abbildung 4.5: Schnittwinkel unterscheidet sich vom Vektorenwinkel

Allgemein liegen an einem Schnittpunkt zweier Geraden zwei Paare aus Scheitelwinkeln vor, von denen die gegenüberliegenden Scheitelwinkel natürlich gleich groß sind. Um den Schnittwinkel eindeutig festzulegen, definiert man:

Definition. Schneiden sich zwei Geraden in einem Punkt, verwendet man als Schnittwinkel stets den kleineren Winkel. (Sind alle vier Winkel gleich groß (90°), so ist es egal, welchen der Winkel man als Schnittwinkel festlegt.)

Hätten wir statt $\vec{r}_g$ mit dem Vektor $-\vec{r}_g$ gerechnet, so wird aus der obigen Formel:

$$\cos(\alpha) = \frac{(-\vec{r}_g) \bullet \vec{r}_h}{|-\vec{r}_g| \cdot |\vec{r}_h|} = \frac{-\vec{r}_g \bullet \vec{r}_h}{|\vec{r}_g| \cdot |\vec{r}_h|}$$

Man erkennt, dass sich dadurch aber lediglich das Vorzeichnen des Zählers ändert.
Je nach Wert des Zählers $-\vec{r}_g \bullet \vec{r}_h$ ist dann $\cos(\alpha)$ entweder positiv oder negativ. Beim Thema Skalarprodukt haben wir aber bereits gelernt, dass ein negatives Skalarprodukt zu einem stumpfen Winkel $>90°$ gehört. Diese Winkel haben wir aber bei der Definition des Schnittwinkels ausgeschlossen. Die einfachste Möglichkeit, besteht darin, dass wir im Zähler noch Betragsstriche ergänzen:

Satz. *Für den Schnittwinkel α zwischen zwei Geraden mit den Richtungsvektoren $\vec{r}_g$ und $\vec{r}_h$, die sich in einem Punkt schneiden, gilt:*

$$\cos(\alpha) = \frac{|\vec{r}_g \bullet \vec{r}_h|}{|\vec{r}_g| \cdot |\vec{r}_h|}$$

Sollte der gerade formulierte Satz zu verwirrend mit den vielen Betragsstrichen sein, so gibt es noch eine zweite Möglichkeit, die in einem eigenen Satz ausgedrückt wird:

Satz. *Der Schnittwinkel α zwischen zwei Geraden mit den Richtungsvektoren $\vec{r}_g$ und $\vec{r}_h$ lässt sich auf folgende Weise berechnen:*

1. Man berechnet den Winkel zwischen den beiden Richtungsvektoren mit der üblichen Kosinusformel. Ist dieser Winkel $\leq$90°, so liegt der Schnittwinkel vor.

2. Sollte der Winkel $>$90° sein, so verwendet man statt des berechneten Winkels den Nebenwinkel (180°-α).

5 Ebenen und Ebenengleichungen

5.1 Ebenengleichungen

Eine Ebene stellen wir uns anschaulich vor wie ein unendlich ausgedehntes zweidimensionales Blatt Papier. Sie ist eindeutig festgelegt durch einen Punkt in der Ebene und 2 linear unabhängige Richtungsvektoren, die die Ebene aufspannen. Ähnlich wie bei der Geradengleichung kann man also vom Aufpunkt aus alle Punkte der Ebene erreichen, indem man Vielfache der Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ verwendet.

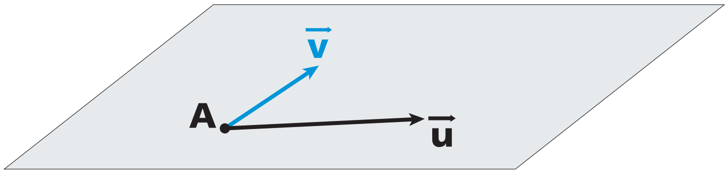

Abbildung 5.1: Ebene mit zwei möglichen Richtungsvektoren

Definition. *Ebenengleichung*
Eine Ebene E ist die Menge aller Vektoren $\vec{x}$, die die Gleichung $\vec{x} = \vec{a} + r \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v}$ mit $r, s \in \mathbb{R}$ erfüllen. Wir schreiben dafür kürzer: $E: \ \vec{x} = \vec{a} + r \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v}$.
Dabei heißt $\vec{a}$ *Stützvektor* und der zugehörige Punkt A heißt *Aufpunkt*. Die Vektoren $\vec{u}, \vec{v}$ werden *Richtungsvektoren* oder auch *Spannvektoren* genannt. Die Zahlen r, s heißen Parameter und wie bei einer Gerade spricht man bei dieser Ebene von einer *Parametergleichung*. (Mitunter wird auch das Wort Punkt-Richtungsgleichung verwendet).

Auch durch die Angabe von drei Punkten A, B, C, die in der Ebene liegen, kann man eine Ebene eindeutig charakterisieren. Die zugehörige Gleichung erhält man z.B. durch Wahl von A als Aufpunkt und $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ als Richtungsvektoren.

$$\vec{x} = \vec{a} + r \cdot \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{AC}$$

Diese Art von Gleichung wird auch Dreipunktegleichung einer Ebene genannt, ist letztlich aber nur ein spezieller Fall einer Parametergleichung.

5.2 Normalengleichungen

Die zwei Richtungsvektoren einer Ebene sind nicht eindeutig festgelegt, d.h. es gibt an dieser Stelle unendlich viele Auswahlmöglichkeiten. So beschreiben die beiden Gleichungen $E_1: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $E_2: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$ trotz unterschiedlicher Richtungsvektoren die gleiche Ebene (hier eine Ebene parallel zur x-y-Ebene) !

Wir versuchen daher eine Ebene eindeutiger zu beschreiben. Dabei nutzen wir aus, dass *alle* Richtungsvektoren einer Ebene eine Gemeinsamkeit besitzen. Stellen wir uns dazu einen Tisch als Ebene vor und wählen einen beliebigen Aufpunkt irgendwo auf dem Tisch. Lässt man an diesem Punkt alle möglichen Richtungsvektoren beginnen, so zeigt sich, dass es eine Gerade gibt, die senkrecht durch den Aufpunkt verläuft und damit auch senkrecht auf allen Richtungsvektoren steht.

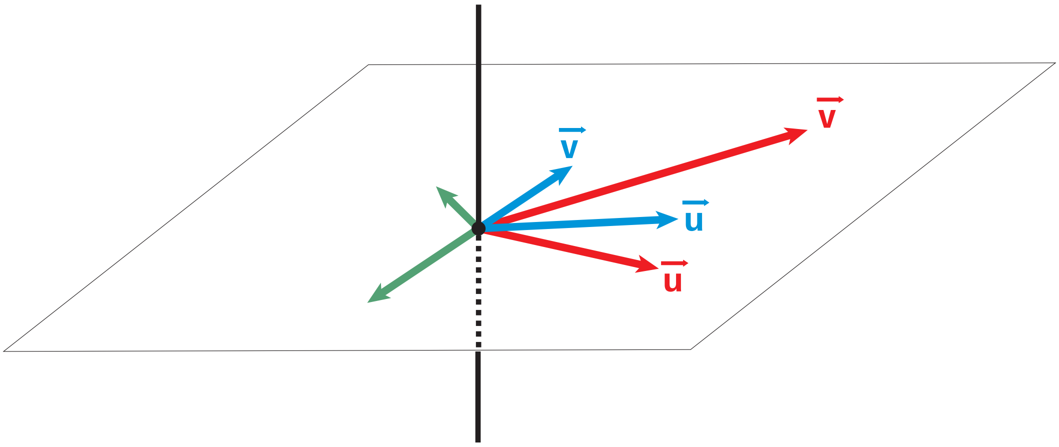

Abbildung 5.2: Richtung des Normalenvektors

Definition. Ein Vektor, der senkrecht auf einer Ebene steht (und damit auch auf allen möglichen Richtungsvektoren dieser Ebene) heißt *Normalenvektor* $\vec{n}$ der Ebene.

Beispiel. Für die Ebene $E:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist der Vektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ ein (möglicher) Normalenvektor, denn $\vec{n}$ steht auf beiden Richtungsvektoren senkrecht. Dies können wir mit dem Skalarprodukt rasch nachrechnen ($\vec{n} \bullet \vec{u} = 0$ und $\vec{n} \bullet \vec{v} = 0$).

Allgemein erhält man einen Normalenvektor $\vec{n}$ durch die Berechnung des Kreuzproduktes $\vec{u} \times \vec{v}$, da dieser neue Vektor ja automatisch senkrecht auf $\vec{u}$ und $\vec{v}$ steht.

Eine neue Art von Ebenengleichung

Multipliziert man unsere bisherige Parametergleichung für Ebenen auf beiden Seiten mit einem Normalenvektor $\vec{n}$, so gelangt man zu einer neuen Art von Gleichung:

$$\begin{aligned} \vec{x} &= \vec{a} + r \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v} \qquad \text{(Parameterform)} \\ \Rightarrow \vec{n} \bullet \vec{x} &= \vec{n} \bullet \vec{a} + \vec{n} \bullet (r\vec{u}) + \vec{n} \bullet (s\vec{v}) \end{aligned}$$

Die beiden letzten Skalarprodukte fallen weg, da ja der Normalenvektor auf den beiden Richtungsvektoren senkrecht steht. Also folgt:

$$\begin{aligned} \vec{n} \bullet \vec{x} &= \vec{n} \bullet \vec{a} \\ \vec{n} \bullet \vec{x} - \vec{n} \bullet \vec{a} &= 0 \end{aligned}$$

Diese neue Form einer Ebenengleichung besitzt einen Normalenvektor sowie den Ortsvektor des Aufpunktes, so dass man von einer Punkt-Normalen-Gleichung bzw. Punkt-Normalen-Form spricht.

Definition. (Ebenengleichung in Punkt-Normalenform)
Eine Ebenengleichung der Art $\vec{n} \bullet \vec{x} - \vec{n} \bullet \vec{a} = 0$ heißt Punkt-Normalenform (PNF) einer Ebenengleichung. Dabei ist $\vec{n}$ ein Normalenvektor der Ebene, $\vec{a}$ ein Stützvektor der Ebene und der zugehörige Punkt A ein Aufpunkt der Ebene.

Mitunter wird in dieser Form der Ebene noch der Normalenvektor ausgeklammert, so dass die Gleichung in der Art $\vec{n} \bullet (\vec{x} - \vec{a}) = 0$ vorliegt.

Punktprobe

Die beiden bisherigen Richtungsvektoren $\vec{u}, \vec{v}$ verschmelzen also im neuen Normalenvektor. Nach wie vor bleibt aber auch $\vec{n} \bullet \vec{x} - \vec{n} \bullet \vec{a} = 0$ eine Gleichung, die Punkte X bzw. ihr Ortsvektor $\vec{x}$ erfüllen müssen, damit sie Teil der Ebene sind. Möchte man von einem Punkt wissen, ob er in einer Ebene liegt oder nicht, so kann man mit Hilfe einer Ebenengleichung eine rechnerische Punktprobe durchführen. Man setzt die Koordinaten für $\vec{x}$ ein und prüft, ob die Ebenengleichung erfüllt ist (Punkt liegt in Ebene) oder nicht (Punkt liegt nicht in Ebene).

Beispiel. Liegt der Punkt $P(2/2/5)$ in der Ebene mit der Gleichung $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$?

Wir setzen für $\vec{x}$ ein und erhalten: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = 1 - 11 = -10$ und stellen fest, dass P nicht in der Ebene liegt.

Die allgemeine Normalenform

Rechnet man in unserer neuen PNF das Produkt $\vec{n} \bullet \vec{a}$ als Skalarprodukt noch aus, so erhält man eine Zahl $c = \vec{n} \bullet \vec{a}$ und kann damit die PNF noch minimal vereinfachen. Diese neue Form heißt dann *allgemeine Normalenform*:

Definition. (Ebenengleichung in allgemeiner Normalenform)

Eine Ebenengleichung der Art $\vec{n} \bullet \vec{x} - c = 0$ heißt allgemeine Normalenform (ANF) einer Ebenengleichung. Dabei ist $\vec{n}$ ein Normalenvektor der Ebene und $c \in \mathbb{R}$ eine beliebige Zahl.

Die Zahl c ergibt sich in dieser Form ja als Skalarprodukt $\vec{n} \bullet \vec{a}$. Dabei gehört $\vec{a}$ zu einem beliebigen Punkt A der Ebene. Hat man das Skalarprodukt berechnet, so ist die Information über den genauen Aufpunkt verloren gegangen. Das ist jedoch nicht weiter tragisch, da es ja auf den speziellen Aufpunkt gar nicht ankommt.

Beispiel. Gegeben ist die Ebene (in ANF) $E : \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \bullet \vec{x} - 5 = 0$. Wollen wir diese Form wieder zurück in die PNF bringen, so benötigen wir einen Aufpunkt. Dazu suchen wir nach einem Vektor $\vec{x}$, der die Ebenengleichung erfüllt. Genau dann liegt der zugehörige Punkt in der Ebene. In diesem Fall wäre $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ ein Vektor, der die Ebenengleichung erfüllt und somit dient $(1/0/2)$ als Aufpunkt. Für die PNF können wir notieren: $E : \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \bullet \vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 0.$

Die Koordinatenform

Die allgemeine Normalenform bietet den Vorteil, dass nur noch ein einziger Vektor (der Normalenvektor $\vec{n}$) in ihr auftreten. Letzlich lässt sich aber auch dieser Vektor zum Verschwinden bringen, indem man das letzte verbleibende Skalarprodukt noch berechnet. Die Form die man dann erhält, nennt sich Koordinatenform und bezieht ihren Namen daher, dass man statt $\vec{x}$ die Koordinaten x, y und z (alternativ dazu auch x_1, x_2 und x_3) verwendet. Ebenso setzt man für den allgemeinen Normalenvektor einfach seine Koordinaten n_1, n_2, n_3 ein:

$$\begin{aligned} \vec{n} \bullet \vec{x} - c &= 0 \\ \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - c &= 0 \\ n_1x + n_2y + n_3z - c &= 0 \end{aligned}$$

Definition. (Ebenengleichung in Koordinatenform)
Eine Ebenengleichung der Art $n_1x + n_2y + n_3z - c = 0$ heißt Koordinatenform (KF) einer Ebenengleichung.

Bemerkung. Eine Koordinatenform hat den Vorteil, dass man sie bequem in eine einzige Zeile schreiben kann. (z.B. $2x + 3y - 4z - 2 = 0$)

Bei einer gegebenen Koordinatenform lässt sich an den Vorfaktoren sehr rasch der zugehörige Normalenvektor wieder ablesen.

5.3 Umwandlungen der Ebenengleichungen

Bei all den verschiedenen Ebenengleichungen aus dem letzten Abschnitt mag man sich die Frage gestellt haben, wozu man derart viele Arten an Gleichungen benötigt. Bei Geraden gibt es ja auch nur eine einzige Art an Geradengleichung. Warum belassen wir es dann nicht auch einfach bei der Parametergleichung für Ebenen ?

Jede dieser verschiedenen Formen (abgekürzt in Zukunft mit PRF, PNF, ANF und KF) hat ihre Stärken.

Parameterform (PRF)

Der Vorteil dieser Schreibweise ist die Verwandtschaft zur Schreibweise bei Geraden. Hat man die Gleichung einer Geraden verstanden, muss man lediglich einen einzigen Term mit einem zweiten Richtungsvektor ergänzen. Dadurch lässt sich diese Art von Gleichung meist schnell notieren, bringt dann aber bei Rechnungen meist einen großen Aufwand mit sich. Betrachten wir dazu ein Beispiel:

Die Ebene $E: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ liegt in PRF vor. Möchten wir jetzt wissen, ob der Punkt $P(6/8/5)$ in dieser Ebene liegt, so können wir für $\vec{x}$ den Vektor $\begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix}$ einsetzen und müssen herausfinden, ob die Gleichung dann erfüllt ist.

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Wir lesen diese Gleichung als drei einzelne Zeilen und erhalten:

$$\begin{aligned} 6 &= 1 + r + s \\ 8 &= 2 - 3r + 4s \\ 5 &= 4 + r - s \end{aligned}$$

Wir verwenden die ersten zwei Zeilen und lösen nach r und s auf (z.B. Additionsverfahren $3I + II$) und erhalten $r = 2, \ s = 3$. Damit aber auch die gesamte Gleichung stimmt, muss mit der unbenutzten Zeile III eine Probe erfolgen, die in diesem Falle fehlschlägt. Erst nach all diesen Schritten zeigt sich, dass der Punkt P nicht in der Ebene liegt. Viel Rechnung für eine spärliche Information.

Koordinatenform (KF) Zum Vergleich nehmen wir an, dass die gleiche Ebene E diesmal in Koordinatenform (KF) gegeben sei. Dann lautet ihre Gleichung:

$$-x + 2y + 7z - 31 = 0$$

Mal abgesehen davon, dass diese Art von Gleichung locker in eine Zeile passt und daher in Büchern und Aufgaben sehr beliebt ist, zeigt sich auch ein rechnerischer Vorteil. Wollten wir erneut vom Punkt $P(6/8/5)$ wissen, ob er in der Ebene liegt, so muss wieder überprüft werden, ob der Punkt die gegebene Gleichung erfüllt. Allerdings ist dies bei der KF sehr leicht, denn wir setzen lediglich die Koordinaten von P ein:

$$-6 + 2 \cdot 8 + 7 \cdot 5 - 31 = -6 + 16 + 35 - 31 = 10 + 4 = 14 \neq 0$$

und erkennen mit minimalem Aufwand, dass P nicht Teil der Ebene ist.

Umwandlungen

Mit all den verschiedenen Arten an Ebenenformen ist sehr sinnvoll, das Umwandeln von einer Form in eine andere genauer zu beleuchten. Folgen wir erneut dem Gedankengang des Abschnitts 5.2, so ergibt sich eine Umwandlung in der folgenden Richtung

$$PRF \to PNF \to ANF \to KF$$

Lässt sich diese Abfolge auch umkehren ? Können wir aus einer gegebenen Koordinatenform wieder eine PRF hervorbringen ? Betrachten wir dazu ein konkretes Beispiel.

Beispiel. Gegeben sei die Ebene $E:\ 3x + y - z - 2 = 0$ in Koordinatenform.

In einem ersten Schritt erinnern wir uns daran, dass die Vorfaktoren vor x, y und z genau die Koordinaten des Normalenvektors sind. Daher erhalten wir hieraus sehr schnell die ANF:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \bullet \vec{x} - 2 = 0 \quad (ANF)$$

Für die Punkt-Normalenform fehlt uns jetzt noch ein beliebiger Punkt, der in der Ebene liegt. Ein Punkt liegt aber genau dann in der Ebene, wenn er die Gleichung der Ebene erfüllt. Daher reicht es aus, einen Vektor $\vec{x}$ in der ANF zu finden, der die Gleichung erfüllt. Eine einfache (aber beileibe nicht die einzige) Möglichkeit bietet der Vektor

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und so gelangen wir zur nächsten Ebenenform:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \bullet \vec{x} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \quad (PNF)$$

Für die noch fehlende Parameterform brauchen wir zwei Richtungsvektoren (der Aufpunkt $(0/2/0)$ ist ja bereits gefunden). Der Normalenvektor ist ja dadurch ausgezeichnet, dass er auf allen Richtungsvektoren senkrecht steht. Suchen wir also einfach zwei Vektoren, die senkrecht auf dem gegebenen Normalenvektor stehen, so haben wir zwei Richtungsvektoren gefunden. Der Test für die Orthogonalität war bekanntlich, dass das Skalarprodukt Null ergibt. Zwei mögliche Vektoren, deren Skalarprodukt mit $\vec{n}$ Null ergibt, wären:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Damit liegt alles Nötige für die Parameterform vor und wir erhalten:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (PRF)$$

Die folgende Abbildung zeigt in einer Übersicht die einzelnen Schritte beim Umwandeln:

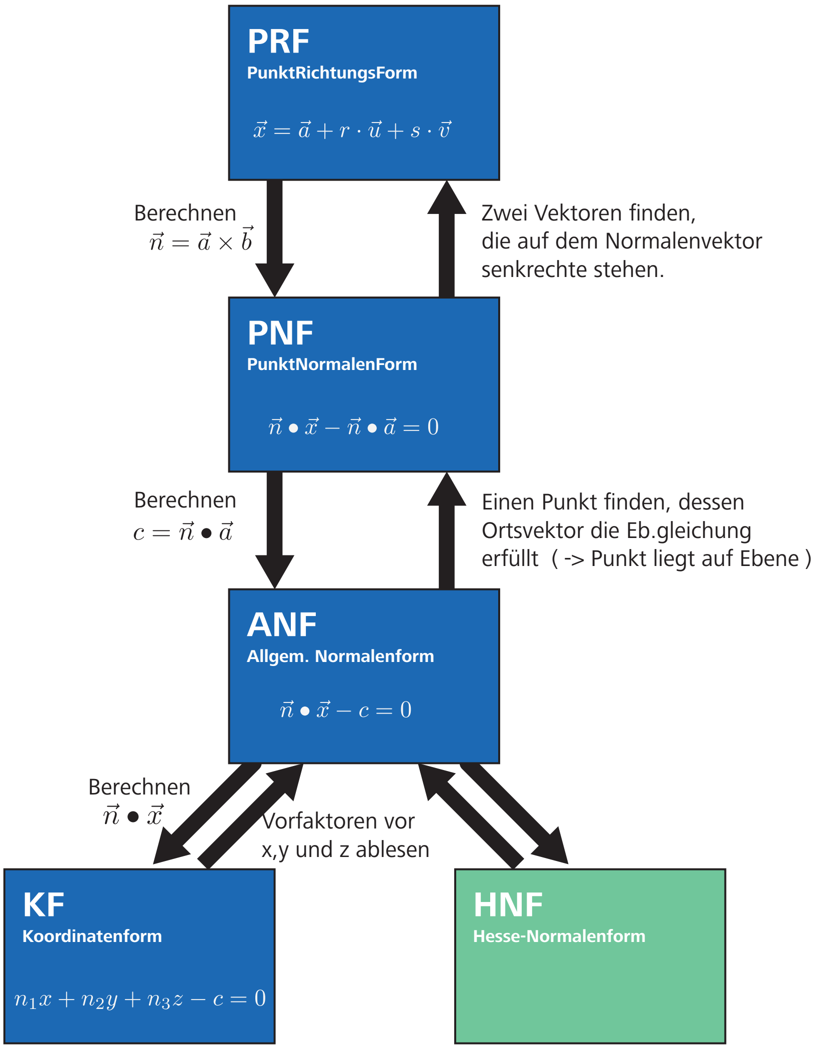

Abbildung 5.3: Umwandlungen bei Ebenenformen

5.4 Lagebeziehung von Ebene und Gerade

Bei einer Ebene E und einer Geraden g gibt es drei verschiedene Möglichkeiten, wie diese zwei geometrischen Gebilde zueinander im Raum liegen können. Die Abbildung zeigt die verschiedenen Möglichkeiten:

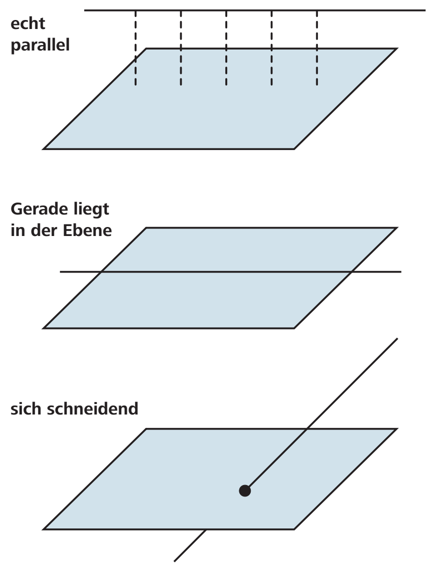

Abbildung 5.4: Lagebeziehungen einer Geraden und einer Ebene

Fall 1. Die Gerade liegt echt parallel zur Ebene, d.h. beide schneiden sich nicht.

Fall 2. Die Gerade liegt vollständig in der Ebene, d.h. g ist eine Teilmenge von E.

Fall 3. Die Gerade schneidet die Ebene in genau einem Schnittpunkt.

Gehen wir davon aus, dass wir von der Geraden einen Richtungsvektor $\vec{r}$ kennen und von der Ebene einen Normalenvektor $\vec{n}$, so lässt sich schon mit Hilfe dieser beiden Vektoren eine erste Unterscheidung vornehmen. Nur in den ersten beiden Fällen ist $\vec{n} \bullet \vec{r} = 0$, denn beide Vektoren stehen aufeinander senkrecht. Durch eine Punktprobe mit dem Aufpunkt lässt sich erkennen, ob die Gerade echt parallel zur Ebene verläuft (Fall 1) oder nicht (Fall 2).

Bei Fall 3 ist es oft auch von Interesse den vorhandenen Schnittpunkt auszurechnen. Der Ansatz besteht darin, die Gleichung der Geraden in die Normalengleichung einzusetzen.

Schnittpunkt einer Geraden und einer Ebene
Im folgenden Beispiel gehen wir von einer gegebenen Geradengleichung und einer Ebenengleichung in Normalenform aus. Die grundlegende Idee besteht darin, die Gleichung der Geraden in die Ebenengleichung einzusetzen.

Beispiel. (Schnitt von Gerade und Ebene)

Gegeben seien die Gerade $g: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ und die Ebene $E \ : \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \bullet \vec{x} - 4 = 0$
. Einen ersten Einblick in die Lagebeziehung zeigt die Zeile:

$$\vec{n} \bullet \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 3 - 2 - 4 = -3$$

In diesem Beispiel stehen Normalen- und Richtungsvektor nicht senkrecht aufeinander, so dass es einen einzigen Schnittpunkt (Fall 3) gibt. Zur Berechnung setzen wir die Gleichung der Geraden $\vec{x} = \cdots$ für

$\vec{x}$ in der Ebenengleichung ein:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \bullet \left[\begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right] - 4 &= 0 \\
\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} - 4 &= 0 \\
10 - 3s - 4 &= 0 \\
6 - 3s &= 0
\end{aligned}$$

Wir erhalten eine Gleichung für den Parameter s und durch Auflösen nach s ergibt sich: $s = 2$
Geht man mit diesem Wert zurück zur Geradengleichung erhält man den Ortsvektor des Schnittpunkts:

$$\vec{x}_s = \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Der gesuchte Schnittpunkt ist demnach $S(14/2/-4)$.

Schnittpunkt Gerade mit Ebene in Koordinatenform
Eine ähnliche Rechnung wie im vorherigen Beispiel können wir auch mit Hilfe der Koordinatenform erreichen. Dazu verwendet man die Geradengleichung und liest sie zeilenweise als drei Gleichung für die jeweilige Koordinaten. Diese werden dann in die Koordinatengleichung eingesetzt.

Beispiel. Abermals seien die Gerade $g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ und die Ebene $E:\ x - y + 2z - 4 = 0$ gegeben. Dies ist die gleiche Ebene wie in der vorherigen Aufgabe. Wir setzen ineinander ein und erhalten:

$$\begin{aligned}
(8 + 3s) - (-2 + 2s) + 2\,(-2s) - 4 &= 0 \\
6 - 3s &= 0 \\
s &= 2
\end{aligned}$$

Wie in der vorherigen Rechnung ergibt sich der Wert des Geradenparameters s und damit dann auch der gesuchte Schnittpunkt:

$$\vec{x}_s = \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Der Schnittpunkt ist wie zuvor $S(14/2/-4)$.

5.5 Lage zweier Ebenen im Raum

Zwei Ebenen können verschiedene Stellungen zueinander im dreidimensionalen Raum einnehmen. Die Abbildung 5.5 zeigt die drei verschiedenen Möglichkeiten. Überprüfe alle Fälle mit Hilfe zweier Blatt Papier als Stellvertreter für die Ebenen.

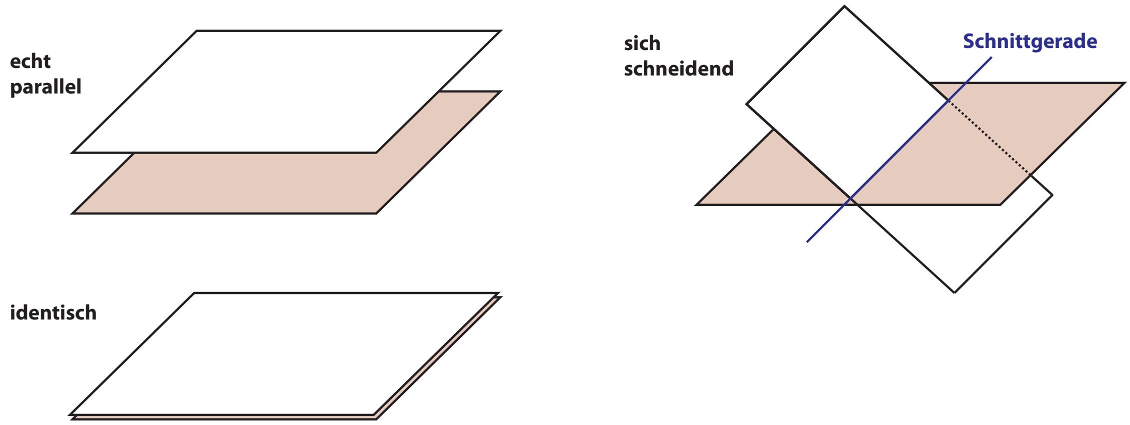

Abbildung 5.5: Lage zweier Ebenen im Raum

Rechnerisch bieten die Normalenvektoren zweier Ebenen eine gute Möglichkeit, die Fälle zu unterscheiden:

Fall 1. Die Normalenvektoren sind Vielfache voneinander $(\vec{n}_1 \| \vec{n}_2)$.
In diesem Fall sind die Vektoren parallel zueinander bzw. Vielfache voneinander und da die Vektoren ja senkrecht auf der Ebene stehen, stehen beide Normalenvektoren senkrecht auf beiden Ebenen. Somit liegen die Ebenen parallel zueinander. Die genauen Details der Parallelität (echt parallel oder identisch) erhält man erneut mit einer Aufpunktprobe. Der Aufpunkt einer der beiden Ebenen wird daraufhin überprüft, ob er auch gleichzeitig in der anderen Ebene liegt.

Fall 2. Die Normalenvektoren sind nicht Vielfache voneinander $(\vec{n}_1 \nparallel \vec{n}_2)$.
Beide Ebenen sind hier nicht mehr parallel zueinander. Dadurch dass jede Ebene sich unendlich weit ausdehnt, kommt es zu einer Schnittgeraden der beiden Ebenen.

Sollten die beiden Ebenen nicht parallel zueinander liegen, so gibt es eine Schnittgerade. Zu deren Berechnung gibt es zwei verschiedene Möglichkeiten, die an folgendem Beispiel gezeigt werden.

Schnittgerade zweier Ebenen (Methode A)

Bei dieser Methode wird eine der beiden Gleichungen in die andere eingesetzt. Dazu sollte eine der beiden Ebenen in Parameterform vorliegen. (Falls nicht, muss sie erst dahin umgewandelt werden). Die andere Ebene kann dann entweder in Normalenform oder in Koordinatenform auftreten.

Ebene 1: E_1: $6x + y + z = 4$, Ebene 2: E_2: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Die beiden gegebenen Ebenen sind in KF bzw. in PRF angegeben. Wir verwenden E_2 und lesen dort zeilenweise die einzelnen Koordinaten des Vektors $\vec{x}$ ab. Diese Koordinaten werden dann in der KF eingesetzt.

Einzeln gelesen ergeben sich folgende Koordinaten:

$$x = 0 + 1r + 0s = r,\;\; y = 1 - r + 2s,\;\; z = 0 + r + s = r + s$$

Eingesetzt in die KF von E_1:

$$\begin{aligned} 6(r) + (1 - r + 2s) + (r + s) &= 4 \\ 6r + 3s + 1 &= 4 \\ 6r + 3s &= 3 \\ 2r + s &= 1 \end{aligned}$$

Diese Zeile wird nach einem der beiden Parameter aufgelöst: $s = 1 - 2r$

Damit lässt sich s in der Gleichung von E_2 ersetzen, so dass nur noch r als einziger Parameter übrig ist:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + (1 - 2r) \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Durch konsequentes Vereinfachen und Trennen nach Termen mit r und ohne r ergibt sich die Form einer Geradengleichung. Dies ist dann die gesuchte Gleichung der Schnittgeraden.

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - 2r \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Schnittgerade zweier Ebenen (Methode B)

Die zweite Methode verwendet zwei Ebenen in Koordinatenform und betrachtet sie schlicht als zwei Gleichungen eines Gleichungssystems. Wie sonst auch beim Gauß'schen Verfahren wird eine Variable elimiert (üblicherweise x). Da eine dritte Zeile fehlt, kann keine eindeutige Lösung herauskommen. Das Gleichungssystem ist unterbestimmt.

Wir verwenden erneut die beiden Ebenen wie in der Rechnung von Methode A. Dazu ist Gleichung von E_2 vorher noch in die Koordinatenform überführt worden.

Ebene 1: E_1: $6x + y + z = 4$, Ebene 2: E_2: $3x + y - 2z = 1$

Als Gleichungssystem geschrieben:

$$\begin{aligned} 6x + y + z &= 4 \\ 3x + y - 2z &= 1 \end{aligned}$$

Wir subtrahieren das Doppelte der zweiten Zeile von der ersten und erhalten nach dem ersten Schritt des Gauß-Verfahrens:

$$\begin{aligned} 6x + y + z &= 4 \\ -y + 5z &= 2 \end{aligned}$$

An dieser Stelle wählt man in der letzten Zeile für z eine beliebige Zahl, d.h. $z = k$ mit $k \in \mathbb{R}$. Nach diese Wahl lässt sich dann die zweite Zeile nach y auflösen:

$$y = 5z - 2 = 5k - 2$$

Mit den Ergebnissen für y und z gehen wir in die erste Zeile und lösen nach x auf:

$$\begin{aligned} 6x + (5k - 2) + k &= 4 \\ 6x + 6k - 2 &= 4 \\ 6x &= 6 - 6k \\ x &= 1 - k \end{aligned}$$

Der letzte Schritt besteht nun lediglich darin, alle einzelnen Gleichungen für x, y und z zu vereinen:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - k \\ 5k - 2 \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - k \\ -2 + 5k \\ 0 + k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dies ist die Gleichung der gesuchten Schnittgeraden. Sie unterscheidet sich äußerlich von dem Ergebnis der Rechnung bei Methode A. Ein genauerer Blick zeigt aber, dass lediglich ein anderer Aufpunkt verwendet wurde und dass auch die Richtungsvektoren kollinear sind.

5.6 Weitere Schnittwinkel

Bereits im Abschnitt 4.2 wurde ausführlich beschrieben, wie man den Schnittwinkel zweier sich schneidender Geraden berechnet. Dadurch, dass wir ein Kapitel später aber auch Ebenen eingeführt haben, gibt es dadurch weitere Möglichkeiten für das Entstehen von Schnittwinkeln. Letztlich geht es immer darum, dass man passende Vektoren findet, die den gesuchten Winkel einschließen.

Der Fall Ebene-Ebene

Zwei Ebenen, die sich in einer Geraden schneiden, bilden anschaulich einen Winkel. Eigentlich bilden sie sogar vier Winkel, von denen aber die gegenüberliegenden gleich groß sind. Wie bei zwei Geraden wählt man als Schnittwinkel den kleineren Winkel, d.h. der größte Winkel, den zwei Ebenen bilden können beträgt 90°.

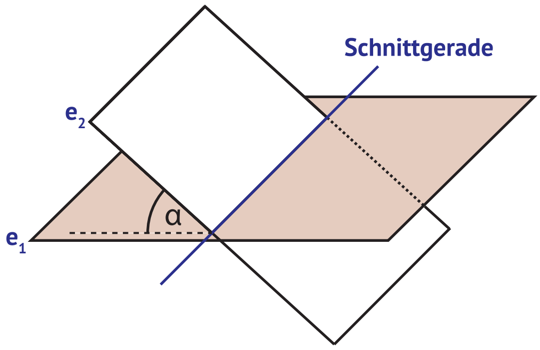

Abbildung 5.6: Schnittwinkel zweier Ebenen

Die dreidimensionale Darstellung lässt sich dadurch vereinfachen, indem man seitlich auf die Ebenen schaut (d.h. die Ebenen liegen entlang der Blickrichtung) und dabei zusätzlich die Normalenvektoren ergänzt.

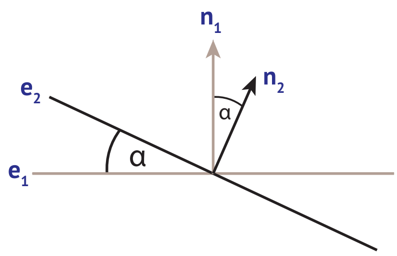

Abbildung 5.7: Schnittwinkel und Normalenvektoren

Die beiden Normalenvektoren $\vec{n}_1$ und $\vec{n}_2$ sind gegenüber der Ebene beide um 90° gedreht, daher findet sich der Winkel α auch zwischen diesen beiden Vektoren. Somit folgt wie üblich bei zwei Vektoren:

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{n}_1 \bullet \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$$

Was passiert allerdings, wenn die Lage der Normalenvektoren gar nicht der abgebildeten Situation entspricht?

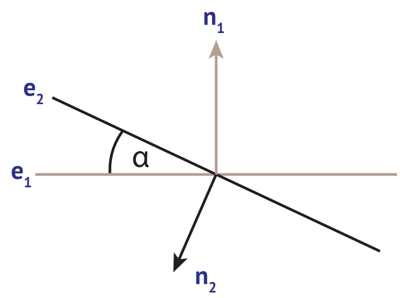

Abbildung 5.8: Mit umgedrehtem zweiten Normalenvektor

Ein Normalenvektor steht nur senkrecht auf der Ebene, d.h. beide Vektoren könnten auch genau in die entgegengesetzte Richtung zeigen. Am Nenner der obigen Formel ändert das nichts, nur der Zähler ändert sein Vorzeichen. Vermeiden lässt sich dies (erneut gilt der Hinweis auf den Fall zweier Geraden), indem man zusätzlich im Zähler zur Vermeidung von Minuszeichen den Betrag des Skalarprodukts verwendet.

Satz. *Für den Schnittwinkel α zwischen zwei Ebenen mit den Normalenvektoren $\vec{n}_1$ und $\vec{n}_2$, die sich in einer Geraden schneiden, gilt:*

$$\cos(\alpha) = \frac{|\vec{n}_1 \bullet \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$$

Der Fall Ebene-Gerade

Ist eine Gerade nicht parallel zu einer Ebene, so schneidet sie die Ebene unter einem bestimmten Winkel, der zwischen der Geraden und der Ebenen liegt. Anschauliches Experimentieren mit Papier (als Ebene) und Stift (als Gerade) macht sofort klar, dass der Winkel erneut maximal 90° erreichen kann. Weniger anschaulich ist auf Anhieb allerdings die Antwort auf die Frage, wer überhaupt den Winkel bildet.

Definition. Schneidet eine Gerade eine Ebene in einem einzigen Punkt, so wird der Schnittwinkel gebildet von der Geraden und der senkrechten Projektion der Geraden auf die Ebene.

Anschaulich kann man sich das auf folgende Weise vorstellen: Lassen wir Licht senkrecht auf die Ebene fallen, so entsteht ein Schatten der Geraden. Dieser Schatten ist die senkrechte Projektion der Gerade auf die Ebene. Ohne Schatten ausgedrückt beginnen wir bei einem beliebigen Punkt der Geraden und legen eine Gerade durch diesen Punkt, die senkrecht zur Ebene ist. Der entstehende Schnittpunkt dieser Hilfsgeraden (eine Art Lot) mit der Ebene ist die senkrechte Projektion.

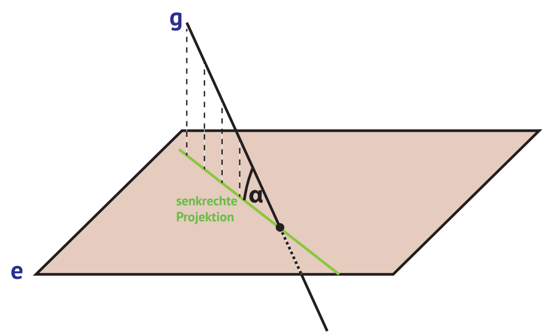

Abbildung 5.9: Senkrechte Projektion und Schnittwinkel

So furchterregend die Situation mit der Projektion auf den ersten Blick auch scheint, die Lage vereinfacht sich, wenn wir unseren Blick wieder entlang der Ebene legen und zusätzlich den Normalenvektor ergänzen.

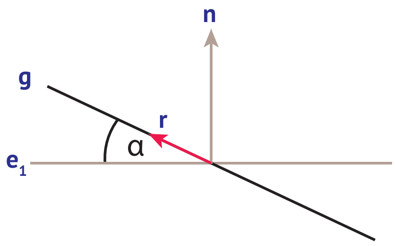

Abbildung 5.10: Schnittwinkel Gerade–Ebene

Die Zeichnung offenbart aber, dass der gesuchte Winkel diesmal gar nicht von den gegebenen Vektoren gebildet wird. Daher wählen wir den Umweg, berechnen mit der üblichen Kosinusformel den Winkel β zwischen $\vec{n}$ und $\vec{r}$ und können dann den eigentlichen Winkel berechnen mit $\alpha = 90° - \beta$.

Wieder müssen wir abschließend noch darüber nachdenken, was passiert, wenn die beiden Vektoren genau in die entgegengesetzte Richtung zeigen. Die folgende Abbildung geht alle weiteren Möglichkeiten durch und zeigt, dass wir entweder auf $\alpha = 90° - \beta$ oder auf $\alpha = \beta - 90°$ stoßen.

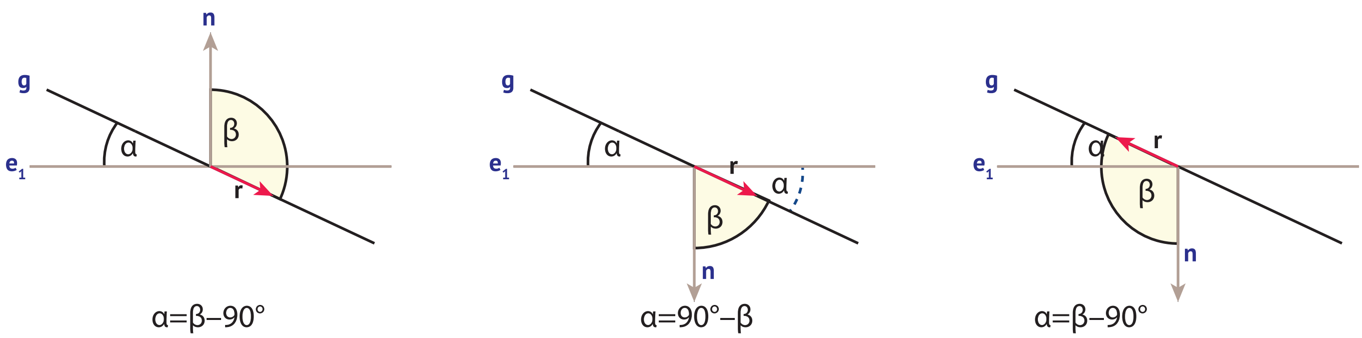

Abbildung 5.11: Weitere Lagen von Normalen- und Richtungsvektor

Vermeiden lässt sich diese Fallunterscheidung mit Hilfe von Betragsstrichen.

Satz. *Der Schnittwinkel α zwischen einer Geraden mit dem Richtungsvektor $\vec{r}$ und einer Ebene mit dem Normalenvektor $\vec{n}$, die sich in einem Punkt schneiden, lässt sich folgendermaßen berechnen:*

1. *Berechne den Winkel β zwischen den beiden Vektoren mit $\cos(\beta) = \frac{|\vec{r} \bullet \vec{n}|}{|\vec{r}| \cdot |\vec{n}|}$.*
2. *Dann ist der gesuchte Schnittwinkel $\alpha = |90^\circ - \beta|$.*

6 Abstände

In diesem Kapitel widmen wir uns der Berechnung von Abständen. Um alle Unklarheiten auszuräumen, ist mit dem Begriff Abstand dabei stets der *kleinstmögliche* Abstand gemeint. So besitzt ein Punkt im Raum zu jedem Punkt einer Geraden einen anderen Abstand aber zur Geraden als Ganzes gesehen nur einen (kleinstmöglichen) Abstand.

6.1 Abstand Punkt-Punkt

Bereits im Kapitel 1.5 wurde der Abstand zweier Punkte behandelt. Sind A und B zwei Punkte im Raum, so wird mit $d(A, B)$ ihr Abstand bezeichnet und dieser berechnet sich einfach als Länge des Verbindungsvektors.

$d(A, B) = |\overrightarrow{AB}| = |\vec{b} - \vec{a}|$.

6.2 Abstand Punkt-Ebene

Gegeben ist ein Punkt P im Raum und eine Ebene E . Wir suchen den Abstand $D = d(P, E)$ des Punktes zur Ebene. Anschaulich erhält man diesen Abstand indem man sich vom Punkt P aus senkrecht auf die Ebene zu bewegt.

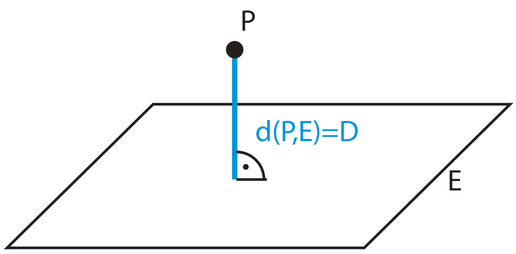

Abbildung 6.1: Abstand eines Punktes zu einer Ebene

Zur Berechnung dieses Abstands gibt es zwei gängige Verfahren:

Lotfußpunktverfahren

Geht man von P aus senkrecht auf die Ebene zu, gelangt man zu einem speziellen Punkt der Ebene, der *Lotfußpunkt* L des Punktes P genannt wird. Kennt man diesen Punkt, so lässt sich der gesuchte Abstand leicht mit Hilfe des Abstandes dieser zwei Punkte berechnen.

Der Punkt L ergibt sich als Schnittpunkt der Ebene und einer Hilfsgeraden, die durch P verläuft und senkrecht zur Ebene steht. Diese Hilfsgerade wird *Lotgerade* genannt. Wie jede Gerade benötigt auch die Lotgerade einen Aufpunkt und einen Richtungsvektor. Als Aufpunkt kann man P verwenden. Da der Normalenvektor der Ebene ja auch senkrecht auf der Ebene steht, zeigt er schon in die für die Gerade erforderliche Richtung und kann als Richtungsvektor dienen.

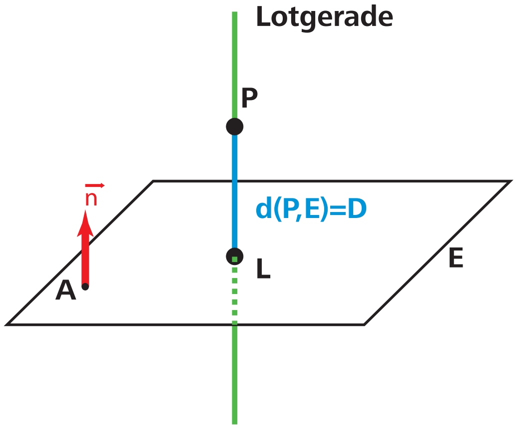

Abbildung 6.2: Lotgeradenverfahren

Zusammengefasst:

1. Stelle die Gleichung der Lotgeraden auf ($\vec{x} = \vec{a} + s \cdot \vec{r}$) und verwende als Stützvektor (Aufpunkt) $\vec{a} = \vec{p}$ und als Richtungsvektor $\vec{r} = \vec{n}$.

2. Berechne den Schnittpunkt dieser Lotgeraden und der gegebenen Ebene. (Geradengleichung in Ebenengleichung einsetzen!). Der Schnittpunkt ist der Lotfußpunkt L von P.

3. Berechne den gesuchten Abstand von Punkt und Ebene mit Hilfe des Verbindungsvektors $\overrightarrow{PL}$, d.h. $d(P,E) = d(P,L) = |\overrightarrow{PL}|$.

Beispiel. Gegeben sei die Ebene $E: \; x + y + 2z - 3 = 0$ und der Punkt $P(1/2/3)$. Wie groß ist der Abstand $d(P,E)$?

Für die Lotgerade erhalten wir die Gleichung $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Wir lesen die Gleichung zeilenweise und setzen wie gewohnt in die Koordinatenform der Ebene ein. Es ergibt sich:

$$\begin{aligned} (1+s) + (2+s) + 2(3+2s) - 3 &= 0 \\ 6s + 6 &= 0 \\ s &= -1 \end{aligned}$$

Für den Lotfußpunkt erhalten wir $L(0/1/1)$ und können damit dann den gesuchten Abstand berechnen:

$$d(P,E) = d(P,L) = |\overrightarrow{PL}| = \left| \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{6}$$

Die Hesse'sche Normalenform

Es gibt eine Alternative zum Lotfußpunktverfahren (s.o.), die sich dadurch auszeichnet, dass sie sehr schnell die Berechnung des Abstandes eines Punktes zu einer Ebene zulässt. Für solche Abstandsberechnungen kann man eine neue Form der Ebenengleichung einführen, die auf den Namen *Hesse'sche Normalenform* (HNF) hört.

Definition. (Ebenengleichung in Hesse-Normalenform)
Eine Ebenengleichung der Art $\vec{n}^0 \bullet \vec{x} - d = 0$ heißt Hesse-Normalenform (HNF) einer Ebenengleichung. Dabei ist $\vec{n}^0$ ein Einheitsnormalenvektor der Ebene, d.h. ein Normalenvektor mit der Länge 1. Der Parameter d ist eine beliebige reelle Zahl.

Die HNF schließt damit nahtlos an die allgemeine Normalenform an, unterscheidet sich aber von ihr dadurch, dass sie zwingend einen Normalenvektor der Länge 1 voraussetzt. Erinnern wir uns kurz daran, dass man ja jeden Vektor auf die Länge 1 bringen kann, indem man ihn durch seinen eigenen Betrag dividiert. Somit kann man durch eine einfache Division durch $|\vec{n}|$ sehr einfach von der ANF zur HNF gelangen.

$$\begin{aligned} \vec{n} \bullet \vec{x} - c &= 0 \qquad (ANF) \\ \frac{1}{|\vec{n}|}\vec{n} \bullet \vec{x} - \frac{1}{|\vec{n}|}c &= 0 \\ \vec{n}^0 \bullet \vec{x} - d &= 0 \qquad (HNF) \end{aligned}$$

Beispiel. Es sei die Ebene $E: \; 3x + 2y + 4z - 10 = 0$ in Koordinatenform gegeben. Wie lautet eine Darstellung in HNF ?

Aus der KF lässt sich schnell die allgemeine Normalenform ablesen: $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \bullet \vec{x} - 10 = 0$

In diesem Fall hat der Normalenvektor die Länge $|\vec{n}| = \sqrt{9+4+16} = \sqrt{29}$. Eine Division durch $\sqrt{29}$ liefert uns die HNF:

$$\frac{1}{\sqrt{29}} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \bullet \vec{x} - \frac{10}{\sqrt{29}} = 0 \qquad (HNF)$$

Diese Form einer Ebenengleichung sieht durch die auftretenden Wurzeln fast immer schrecklich kompliziert aus und ist auch für die allermeisten Rechnungen zu umständlich. Nur bei der Berechnung von Abständen zur Ebene lässt sie sich sinnvoll einsetzen. Der folgende Satz zeigt wie:

Satz. *Es sei $E: \; \vec{n}^0 \bullet \vec{x} - d = 0$ eine Ebene in Hesse-Normalenform und P ein beliebiger Punkt. Dann gilt für den Abstand $d(P,E)$ des Punktes P zur Ebene E:*

$$d(P,E) = |\vec{n}^0 \bullet \vec{p} - d|$$

Anders formuliert: Der Abstand $d(P,E)$ lässt sich mit der HNF dadurch berechnen, dass man in der linken Seite der HNF den Ortsvektor von P an der Stelle von $\vec{x}$ einsetzt und den Abstand als Betrag der linken Seite erhält.

Beweis. Betrachten wir eine Ebene E und einen Punkt P , der nicht Teil der Ebene ist. Die Ebene zerteilt den gesamten dreidimensionalen Raum in zwei Halbräume, so dass der Punkt P auf der einen oder der anderen Seite der Ebene liegt. Die Abbildung zeigt die beiden Fälle, die man in diesem Fall mit "oberhalb" und "unterhalb" bezeichnen kann. Zusätzlich wurde ein beliebiger Aufpunkt A und ein dort ansetzender Normalenvektor $\vec{n}^0$ der Länge 1 eingezeichnet.

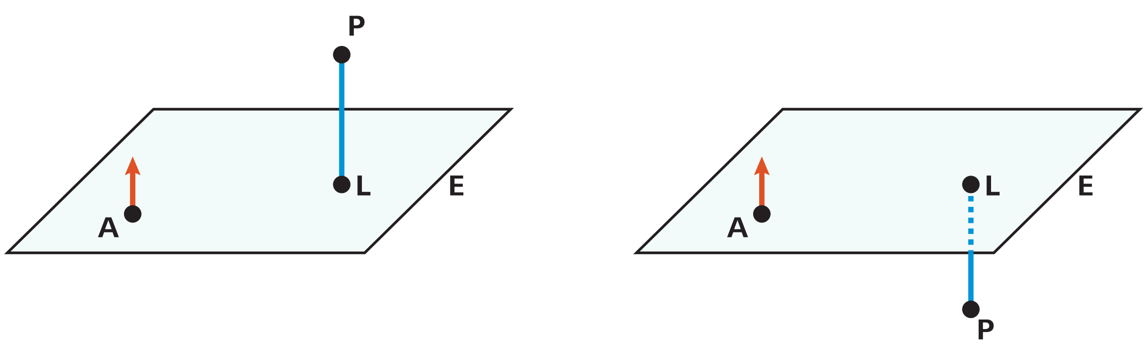

Abbildung 6.3: Zwei mögliche Lagen für den Punkt P

Variante 1: P liegt oberhalb
Wir ergänzen den Vektor $\overrightarrow{AP}$, der mit dem Normalenvektor den Winkel α einschließt. Von P aus fügen wir noch den Lotfußpunkt L hinzu und erkennen, dass dann am Punkt P noch einmal ein gleich großer Winkel α entsteht.

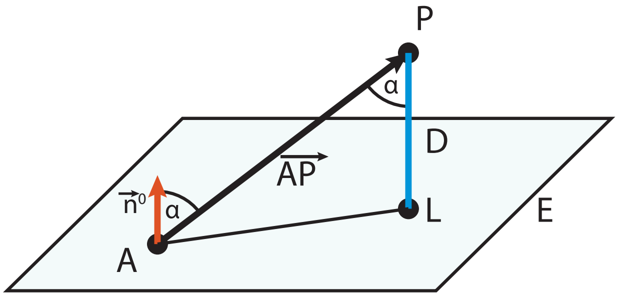

Abbildung 6.4: Erste mögliche Lage für P

Mit klassischer Mittelstufen-Trigonometrie folgt im rechtwinkligen Dreieck ALP:

$$\cos(\alpha) = \frac{D}{|\overrightarrow{AP}|}$$

Andererseits gilt mit Hilfe des Skalarprodukts:

$$\vec{n}^0 \bullet \overrightarrow{AP} = |\vec{n}^0| \cdot |\overrightarrow{AP}| \cdot \cos(\alpha) = 1 \cdot |\overrightarrow{AP}| \cdot \cos(\alpha) = |\overrightarrow{AP}| \cdot \cos(\alpha)$$

Ersetzen wir den Kosinusterm erhalten wir insgesamt:

$$\vec{n}^0 \bullet \overrightarrow{AP} = D$$

Variante 2: P liegt unterhalb
Wieder wird der Vektor $\overrightarrow{AP}$ ergänzt, der diesmal aber mit dem Normalenvektor einen Winkel $>90°$ einschließt. Um diesen Fall auf den gerade zuvor betrachteten Fall zurückzuführen, verwenden wir den Vektor $-\vec{n}^0$, der entgegengesetzt zu $\vec{n}^0$ nach unten zeigt. Dort finden wir dann erneut den Winkel α und erkennen ihn auch ein zweites Mal am Punkt P wieder.

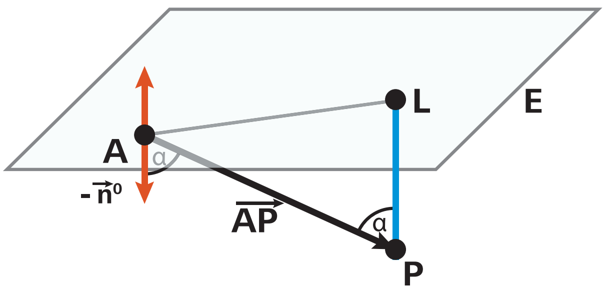

Abbildung 6.5: Zweite mögliche Lage für P

Wieder gilt:

$$\cos(\alpha) = \frac{D}{|\overrightarrow{AP}|}$$

Beim Skalarprodukt müssen wir aufpassen, dass wir auch $-\vec{n}^0$ verwenden:

$$-\vec{n}^0 \bullet \overrightarrow{AP} = |-\vec{n}^0| \cdot |\overrightarrow{AP}| \cdot \cos(\alpha) = 1 \cdot |\overrightarrow{AP}| \cdot \cos(\alpha) = |\overrightarrow{AP}| \cdot \cos(\alpha)$$

Die beiden rechten Seiten der Kosinusgleichungen werden wie gehabt verglichen und es folgt:

$$-\vec{n}^0 \bullet \overrightarrow{AP} = D$$

Insgesamt lässt sich erkennen, dass die Berechnung des Abstandes auf zwei ähnliche Resultate führt, die sich nur im Vorzeichen unterscheiden. Setzt man Beträge, so entfällt die Unterscheidung der Fälle. Also erhalten wir:

$$d(P,E) = D = |\vec{n}^0 \bullet \overrightarrow{AP}| = |\vec{n}^0 \bullet (\vec{p} - \vec{a})| = |\vec{n}^0 \bullet \vec{p} - \vec{n}^0 \bullet \vec{a})|$$

Der Punkt A liegt in der Ebene und erfüllt somit die Ebenengleichung. Also ist:

$$\vec{n}^0 \bullet \vec{a} - d = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \vec{n}^0 \bullet \vec{a} = d$$

Damit kann die bisherige Formel noch vereinfacht werden:

$$d(P,E) = D = |\vec{n}^0 \bullet \vec{p} - \vec{n}^0 \bullet \vec{a})| = |\vec{n}^0 \bullet \vec{p} - d|$$

Dies Ergebnis entspricht dem Einsetzen des Vektors $\vec{p}$ in die HNF an der Stelle des Vektors $\vec{x}$. □

Nach diesem langen Beweis können wir diese Möglichkeit des Berechnens eines Abstandes einmal in Aktion sehen. Noch einmal wird die gleiche Aufgabenstellung wie im Beispiel des Lotfußpunktverfahrens betrachtet:

Beispiel. Gegeben sei die Ebene $E : x + y + 2z - 3 = 0$ und der Punkt $P(1/2/3)$. Wie groß ist der Abstand $d(P,E)$?

Wir lesen den Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ab und folgern: $\vec{n}^0 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Damit erhalten wir als ANF bzw. HNF:

$$\begin{aligned} E : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \bullet \vec{x} - 3 &= 0 \qquad (ANF) \\ E : \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \bullet \vec{x} - \frac{3}{\sqrt{6}} &= 0 \qquad (HNF) \end{aligned}$$

Wir setzen den Ortsvektor $\vec{p}$ in der linken Seite ein, denken an den Betrag und erhalten direkt den Abstand:

$$d(P,E) = |\frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{3}{\sqrt{6}}| = |\frac{9}{\sqrt{6}} - \frac{3}{\sqrt{6}}| = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$$

6.3 Abstand Ebene-Ebene

Bei zwei gegebenen Ebenen kümmern wir uns nur um den Fall, dass die beiden Ebenen echt parallel zueinander liegen, da ansonsten der Abstand schon gleich Null ist. Jeder Punkt der einen Ebene hat dann den gleichen Abstand zur anderen Ebene und daher können wir diesen Fall auf die Berechnung Punkt – Ebene zurückführen:

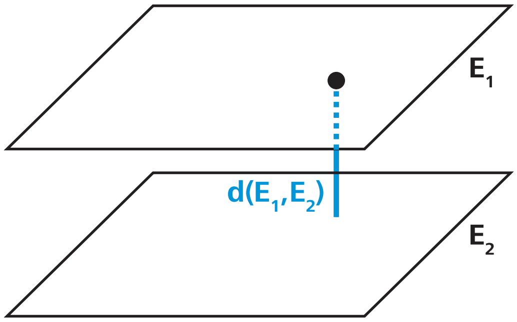

Abbildung 6.6: Abstand paralleler EBenen

Zusammenfassung. Der Abstand zweier paralleler Ebenen E_1, E_2 ist gleich dem Abstand eines beliebigen Punktes $P \in E_1$ zur Ebene E_2 , d.h. $d(E_1, E_2) = d(P, E_2)$ für einen beliebigen Punkt $P \in E_2$.

6.4 Abstand Gerade-Ebene

Bei einer gegebenen Geraden und einer Ebene ist die Berechnung eines Abstandes nur dann nicht trivial, wenn die Gerade parallel zur Ebene verläuft. Ist die Gerade Teil der Ebene bzw. schneidet die Ebene in einem Punkt, ist der Abstand gleich Null. Bei echt paralleler Lage haben alle Punkte der Geraden den gleichen Abstand zur Ebene und wieder lässt sich die Berechnung auf den Fall Punkt – Ebene zurückführen.

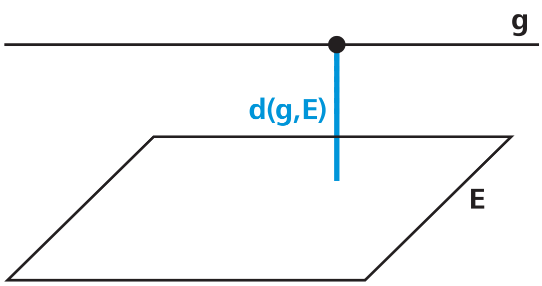

Abbildung 6.7: Abstand einer Geraden zu einer parallelen Ebene

Zusammenfassung. Der Abstand einer Ebene E zu einer parallelen Geraden g ist gleich dem Abstand eines beliebigen Punktes $P \in g$ zur Ebene, d.h. $d(g, E) = d(P, E)$ für einen beliebigen Punkt $P \in g$.

6.5 Abstand Punkt-Gerade

Bei einer gegebenen Geraden g und einem Punkt P können wir den Abstand $d(P, g)$ am schnellsten berechnen, wenn wir eine Hilfskonstruktion durchführen. Betrachten wir dazu zunächst die Situation allgemein von einer Seitenansicht (vgl. Abbildung).

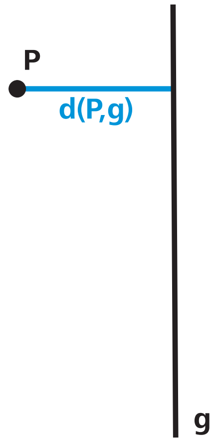

Abbildung 6.8: Abstand Punkt zu einer Geraden

Wir erkennen, dass wir den Abstand des Punktes zur Geraden leicht bestimmen können, wenn wir von P aus senkrecht auf die Gerade zugehen. Der entstehende Schnittpunkt ist wieder eine Art Lotfußpunkt (vgl. Fall Punkt-Ebene). Kennen wir die Koordinaten dieses Punktes L , so lässt sich der gesuchte Abstand als Betrag des Verbindungsvektors $\overrightarrow{PL}$ berechnen.
Ausgehend von der Geraden g und dem Punkt P ergänzen wir eine Hilfsebene E_H , in der zum einen der Punkt P liegt und die gleichzeitig senkrecht auf der Geraden g steht:

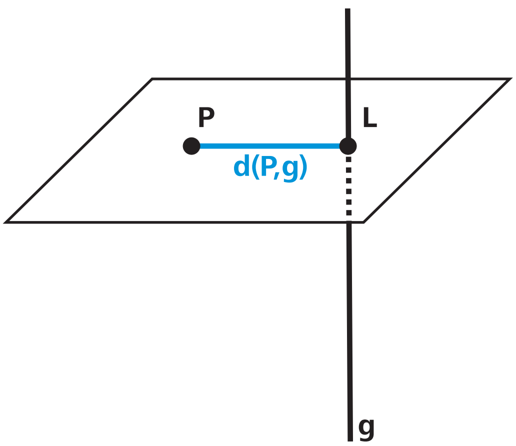

Abbildung 6.9: Berechnung des Abstandes mit einer Hilfsebene

Um eine Gleichung für E_H aufzustellen, verwenden wir P als Aufpunkt (= beliebiger Punkt der Ebene) und den Richtungsvektor der Geraden als Normalenvektor, denn immerhin verläuft die Gerade ja senkrecht durch die Ebene.

Zusammenfassung. Der Abstand eines Punktes P zu einer Geraden g ist gleich dem Abstand des Punktes P zum Schnittpunkt L der Geraden mit der Hilfsebene E_H , in der der Punkt P liegt und die gleichzeitig senkrecht zur Geraden steht. Dann ergibt sich

$$d(P,g) = d(P,L)$$

Beispiel. Gegeben sind die Gerade $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ sowie der Punkt $P(1/4/-2)$. Wie groß ist $d(P,g)$?

Wie erläutert verwenden wir die Hilfsebene E_H und erhalten:

$$
\begin{aligned}
E_H: \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \bullet \vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} &= 0 \qquad (PNF) \\
\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \bullet \vec{x} - 10 &= 0 \qquad (ANF) \\
2y + z - 10 &= 0 \qquad (KF)
\end{aligned}
$$

Setzen wir die Geradengleichung in die Koordinatenform ein, erhalten wir:

$$
\begin{aligned}
2(0 + 2s) + (4 + s) - 10 &= 0 \\
5s - 6 &= 0 \\
s &= 1,2
\end{aligned}
$$

Damit ergibt sich der Lotfußpunkt L mit

$$
\vec{x}_L = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + 1,2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2,4 \\ 5,2 \end{pmatrix}
$$

und schließlich:

$$
d(P,g) = d(P,L) = |\overrightarrow{PL}| = |\begin{pmatrix} -1 \\ 2.4 \\ 5,2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}| = |\begin{pmatrix} -2 \\ -1,6 \\ 7,2 \end{pmatrix}| \approx 7,64
$$

6.6 Abstand paralleler Geraden

Sind zwei gegebene Geraden g, h parallel zueinander, so können wir die Berechnung des Abstandes dieser Geraden auch wieder auf einen anderen Fall zurückschieben. Wir wählen einen beliebigen Punkt $P \in g$ und berechnen den Abstand zur anderen Geraden.

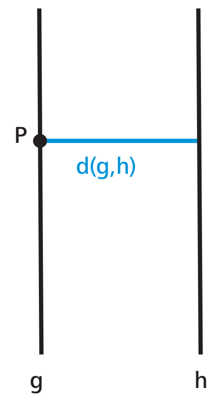

Abbildung 6.10: Abstand paralleler Geraden

Zusammenfassung. Der Abstand zweier paralleler Geraden g, h ist gleich dem Abstand eines beliebigen Punktes P einer der Geraden zur anderen Geraden.. Dann ergibt sich

$$
d(g,h) = d(P,h)
$$

für einen beliebigen Punkt $P \in g$.

6.7 Abstand windschiefer Geraden

Sind zwei Geraden windschief, so ist auf den ersten Blick vielleicht nicht klar, wie man den Abstand beider Geraden berechnet. Eine einfache Vorgehensweise besteht darin, diesen Fall auf die Berechnung des Abstandes Gerade-Ebene zurückzuführen. Dazu betrachten wir zwei windschiefe Geraden $g: \vec{x} = \vec{a} + s \cdot \vec{u}$ und $h: \vec{x} = \vec{b} + s \cdot \vec{v}$ (siehe Abbildung). Lässt man in Gedanken den Richtungsvektor von g auch am Aufpunkt von h starten, ergibt sich eine Ebene, in der zum einen die Gerade h vollständig liegt. Zum anderen ist g dazu parallel, d.h. g hat überall den gleichen Abstand zu dieser Ebene.

6.8 Zusammenfassung der Fälle

Die folgende Übersicht zeigt, wie alle bisherigen Fallunterscheidungen miteinander zusammenhängen. Mache dir jeweils klar, auf welche Weise eine Berechnung auf der Grundlagen einer anderen Rechnung basiert. Die dargestellten orangen Pfeile zeigen dabei, dass man diesen Fall letztlich auf einen anderen Fall zurückführen kann:

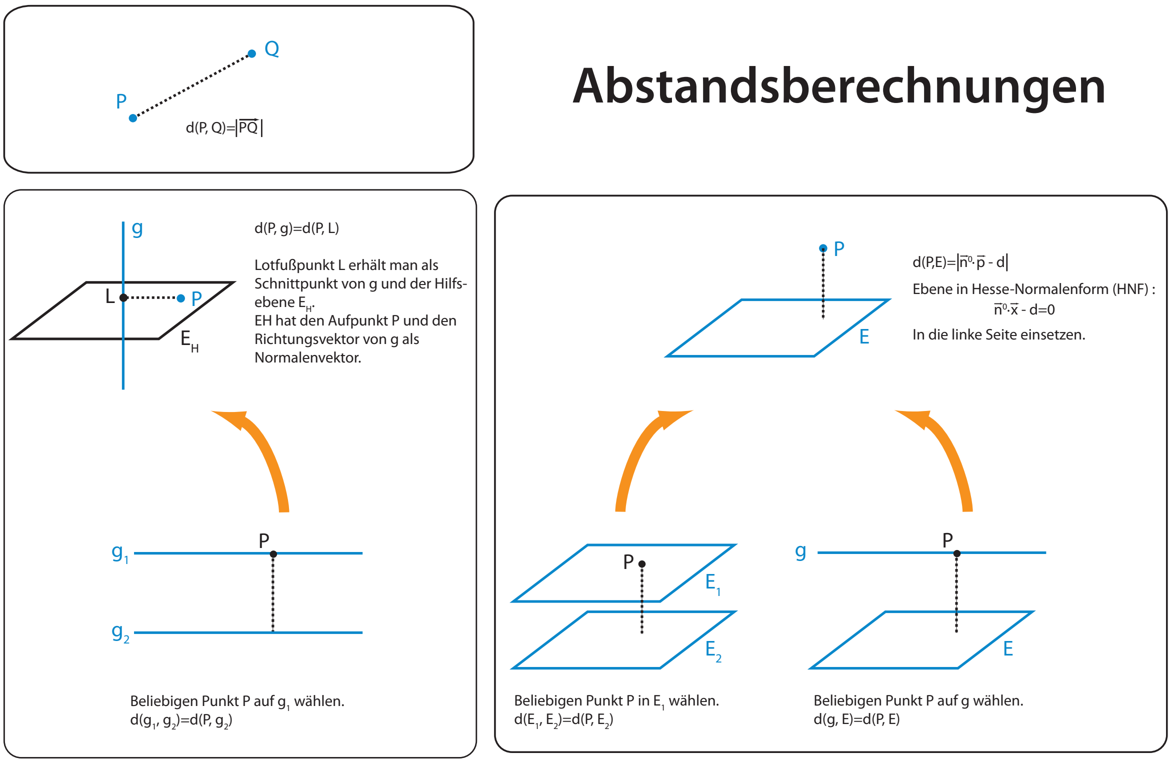

Abbildung 6.11: Übersicht der verschiedenen Abstandsberechnungen